

Fachprüfung AI / TI / MI Mathematik 1 + 2
Prof. Dr. Wolfgang Konen, Dr. A. Schmitter – FH Köln, Institut für Informatik
24.09.2013

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

Klausurdauer: 2 x 60 min.

Hilfsmittel: Formelsammlung Mathematik
 Rezepte Mathe 1+2
 nicht-grafikfähiger Taschenrechner

- Hinweise:**
1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
 2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
 3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muß nachvollziehbar sein (nur Ergebnis reicht nicht!).
 4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
 5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Aufgaben	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1 Aussagenlogik, Mod, Folgen	12	
2 Def.bereich + Funktionen	13	
3 Taylor + Extremwerte	13	
4 Lineare Algebra	12	
5 Mehrdim. Analysis + Integral	13	
6 Graphen	12	
7 Statistik	12	
8 Komplexe Zahlen + DGL	13	
9		
Punktzahl Gesamt:	100	

MATHEMATIK 1 Klausur

Aufgabe 1 Aussagenlogik, Modulare Arithmetik und Folgen

a) Vereinfachen Sie mit den Regeln der Aussagenlogik: $(\bar{A} \Rightarrow B) \wedge \bar{A}$

Berechnen Sie:

b) $(3 \cdot 7 + 78^{925} - 4) \bmod 7$ und $(2^{501} + 37) \bmod 4$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3n^2 + 4n}{n+1} - \frac{3n^2 + n}{n-1} \right]$

Aufgabe 2 Definitionsbereiche und Funktionen

a) Sei $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \sqrt{16 - x^2}$, $x \in \mathbf{R}$

Geben Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ an. Finden Sie sämtliche stationären Punkte von $f(x)$ (d.h. die Stellen x mit $f'(x)=0$).

b) Für welche $x \in \mathbf{R}$ hat $g(x) = x - 4 - \sqrt{6 - x}$ Nullstellen?

Aufgabe 3 Taylor / Extremwerte

- a) Bestimmen Sie das **Taylorpolynom 3.Grades** für $f(x) = 4 \cdot \sqrt{1+x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$
- b) Berechnen Sie mit Hilfe dieses Taylorpolynoms näherungsweise den Funktionswert an der Stelle $x = \frac{1}{16}$. Welche Wurzel berechnen Sie damit näherungsweise? Bestimmen Sie die Genauigkeit mit Hilfe der **Restgliedabschätzung von Lagrange**.
- c) Welcher oben offene Zylinder hat bei einem Volumen von 5 Litern **minimale Oberfläche**?

Aufgabe 4 Lineare Algebra

- a) Definieren Sie den **Rang einer Matrix**.
- b) Der Gauß'sche Lösungsverfahren liefert ein effektives Verfahren zur Rangbestimmung einer Matrix: Man bringt die Matrix auf Zeilenstufenform. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Matrix durch keinen Lösungsvektor erweitert ist. Bestimmen Sie also mit Hilfe des Gauß'schen Lösungsverfahren den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- c) Die Matrix aus b) wäre nun Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems mit 4 Variablen. Wie müsste der zugehörige Lösungsvektor allgemein am Ende (Matrix in Zeilenstufenform) aussehen, damit das Gleichungssystem nicht widersprüchlich ist?

MATHEMATIK 2 Klausur

Aufgabe 5 Mehrdimensionale Analysis + Integral

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe des **Totalen Differentials** für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ die ungefähre Änderung des Funktionswert, wenn der Punkt (3;4) der Definitionsebene in den Punkt (2,98;4,01) verschoben wird. Vergleichen Sie am Ende mit der exakten Funktionswertänderung.
- b) Das im Intervall $[0;\pi]$ unter der Kurve mit der Gleichung $f(x) = \sin x$ liegende Flächenstück rotiere um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 6 Graphen

- a) Gegeben sind folgende Codes.
- o=000 p=001 t=011 b=0100 m=0101 i=10 s=11
 - o=000 p=001 t=011 b=0010 m=1101 i=10 s=11

Einer davon ist ein Präfixcode. Welcher? Erläutern Sie Ihre Entscheidung und entschlüsseln Sie dann folgende Bitfolge:

010110111110111110001001100100000000011

- b) Gegeben ist die **Adjazenzmatrix** eines ungerichteten Graphen mit 5 Knoten:

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
x ₁	0	1	1	0	0
x ₂	1	0	1	1	1
x ₃	1	1	0	0	0
x ₄	0	1	0	0	1
x ₅	0	1	0	1	0

Zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen möglichst kreuzungsfrei.
 Ist dieser Graph schlicht?
 Ist dieser Graph zusammenhängend?
 Begründen Sie Ihre Antworten.

- c) Nummerieren Sie nun die Kanten in Ihrem Graphen durch! Wie sieht die **Inzidenzmatrix** für diesen Graphen aus?

Aufgabe 7 Statistik

- a) Erläutern Sie in eigenen Worten die Begriffe **Median** und **Interquartile Range (IQR)**, die bei der Konstruktion eines Boxplot Verwendung finden. Zeichnen Sie einen Beispiel-Boxplot und markieren Sie darin Median und IQR.
- b) Bei der Herstellung von Festplatten werden in der Regel 6% defekt sein. Der Hersteller liefert die Festplatten in Kisten zu 100 Stück aus. Es sei X die Anzahl der defekten Festplatten in

einer Kiste. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier defekte Festplatten in einer Kiste sind.

- c) Eigentlich ist die Zufallsvariable X binomialverteilt. Bitte verwenden Sie zur Erleichterung der nachfolgenden Rechnung die Aussage des **Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace**. Überprüfen Sie zunächst, ob die Voraussetzungen erfüllt sind. Die notwendigen Werte der Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang.

(1) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mu = E[X]$ und die Standardabweichung σ .

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste 8 oder mehr Festplatten defekt sind.

Aufgabe 8 Komplexe Zahlen + DGL

- (a) Berechnen Sie in der Menge der komplexen Zahlen (i =imaginäre Einheit) sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^5 = i$$

Geben Sie sämtliche Lösungen auch in der kartesischen Form (=Normalform) an.

- (b) Lösen Sie folgende Anfangswertaufgabe für die Funktion $y(x)$:

$$y' = y^2 \cdot \sin x \qquad y(\pi) = 2$$