

Fachprüfung AI / TI / MI Mathematik 1
Prof. Dr. W. Konen, Dr. A. Schmitter – TH Köln, Institut für Informatik
12.07.2022

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

Klausurdauer: 60 min.

Hilfsmittel: Formelsammlung Mathematik
 Rezepte Mathe 1+2, geheftet
 nicht-grafikfähiger Taschenrechner

- Hinweise:**
1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
 2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
 3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein (nur Ergebnis reicht nicht!).
 4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
 5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgaben		max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	Aussagen, Mengen, Modulares	13	
2	Grenzwerte + Gleichungen	12	
3	Taylor + Extremwerte	13	
4	Lineare Algebra	12	
5			
6			
7			
8			
9			
Punktzahl Gesamt:		50	

Aufgabe 1 Aussagenlogik, Modulare Arithmetik und Mengenlehre

- a) Vereinfachen Sie mit den Regeln der Aussagenlogik: $(\bar{A} \Rightarrow B) \wedge \bar{A}$
- b) Berechnen Sie (i) $(91^{9999} - 30 \cdot 20) \bmod 9$ und
 (ii) $(2^{50} + 3) \bmod 7$
- c) Zeichnen Sie zwei Venn-Diagramme der Mengen A,B,C und schraffieren Sie darin die Mengen
 (i) $A \setminus (B \cap C)$ und (ii) $B \cup (A \setminus (B \cup C))$

Aufgabe 2 Grenzwerte und Gleichungen

Es sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie jeweils den Grenzwert:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + 4n - 5}{n + 5} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right)$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmengen unter Beachtung des Definitionsbereiches:

(i) $\ln(x) + \ln(x + 2) = 0$ (ii) $\ln(x) - \ln(x + 2) = 0$

Aufgabe 3 Taylor / Extremwerte

- a) Bestimmen Sie das **Taylorpolynom 2.Grades** für $f(x) = 1 + \sin(x^2)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Berechnen Sie mit Hilfe dieses Taylorpolynoms näherungsweise den Funktionswert an der Stelle $x=0,5$.

Bestimmen Sie die Genauigkeit mit Hilfe der **Restgliedabschätzung von Lagrange**. (Hinweis: Für die Restgliedabschätzung den \sin bzw. \cos betragsmäßig mit 1 abschätzen)

Aufgabe 3 (Forts.) Taylor / Extremwerte

- b) Es soll eine oben offene zylinderförmige Regenwassertonne mit einem Fassungsvermögen von 200 Litern hergestellt werden. Dabei soll möglichst wenig Material verbraucht werden. Berechnen Sie Durchmesser und Höhe dieser Tonne.

Aufgabe 4 Lineare Algebra

- a) Beschreiben Sie kurz in Worten, wann zwei Vektoren zueinander orthogonal sind. Sind folgende dreidimensionale Vektoren zueinander orthogonal?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- b) Bestimmen Sie in folgenden beiden Vektoren x so, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ x \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ x \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Forts.) Lineare Algebra

- c) Von einer **ganzrationalen Funktion 3. Grades** ist folgendes bekannt: Die Funktion besitzt im Punkt P (2/1) ein lokales Minimum und in Q (1/3) einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung mit Hilfe des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus**. Arbeiten Sie zur Erleichterung Ihrer Rechnung mit der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Fachprüfung AI / TI / MI Mathematik 2
Prof. Dr. W. Konen, Dr. A. Schmitter – TH Köln, Institut für Informatik
12.07.2022

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

Klausurdauer: 60 min.

Hilfsmittel: Formelsammlung Mathematik
 Rezepte Mathe 1+2, geheftet
 nicht-grafikfähiger Taschenrechner

- Hinweise:**
1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
 2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
 3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein (nur Ergebnis reicht nicht!).
 4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
 5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgaben	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1		
2		
3		
4		
5	Mehrdim. Analysis + Integral	13
6	Graphen	12
7	Statistik	13
8	Komplexe Zahlen + DGL	12
9		
Punktzahl Gesamt:	50	

Aufgabe 5 Mehrdimensionale Analysis + Integral

- a) Berechnen Sie das **totale Differential** der Funktion

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$$

Bestimmen Sie dann die ungefähre Funktionswertänderung, wenn der Punkt (1;1;1) im Definitionsbereich in den Punkt (1,1; 0,9; 1,15) verschoben wird. Vergleichen Sie diesen Wert mit der wahren Funktionswertänderung.

- b) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Integrationsregel folgendes unbestimmtes Integral:

$$\int 4x \cdot \sin(2x^2 + 2) dx$$

Aufgabe 6 Graphen

Gegeben ist die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nummerieren Sie die Knoten (Wählen Sie x_1 bis x_8 als Zeilen- und als Spaltenüberschrift) und zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen möglichst kreuzungsfrei. Wie können Sie den Knotengrad aller Knoten x_1 bis x_8 aus der Matrix direkt ermitteln?

Ist dieser Graph schlicht?

Ist dieser Graph zusammenhängend?

Ist dieser Graph vollständig?

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

Aufgabe 7 Statistik

- a) Gegeben sind 36 Messungen (bereits der Größe nach sortiert) der Anzahl der Mensabesucher am Campus GM in der Mittagsstunde. Berechnen Sie alle für einen **Boxplot** notwendigen Größen und zeichnen Sie diesen Boxplot.

60	65	65	68	69	72	74	74	75	77	78	82
83	83	85	87	88	89	90	90	91	94	94	95
97	100	102	107	108	110	112	114	115	122	124	125

- b) Jede fünfte Tulpenzwiebel, die verkauft wird, keimt nicht. Sie kaufen ein Netz mit 22 Zwiebeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den gekauften Zwiebeln höchstens eine nicht keimt?
- c) Für eine $N(\mu, \sigma)$ -normalverteilte Größe X mit $\sigma = 2$ gelte $P(X > 58.5) = 0.33$. Welchen Wert hat μ ?

Aufgabe 8 Komplexe Zahlen + DGL

- a) Gegeben ist die komplexe Zahl $z = -1$. Berechnen Sie: $y = z^{\frac{1}{5}}$
Geben Sie sämtliche Lösungen für y auch in der kartesischen Form (=Normalform) an.

- b) Gegeben ist die DGL

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

- (i) Typisieren Sie dies DGL [(in-)homogen, (nicht-)linear, Ordnung, (nicht) konst. Koeff.]
(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser DGL.

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der $N(0,1)$ -Verteilung, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

x	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57534
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,68439	0,68795
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90148
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93185
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94840	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99586	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	3,2	0,99931	3,3	0,99952	3,4	0,99966	3,5	0,99977	
3,6	0,99984	3,7	0,99989	3,8	0,99993	3,9	0,99995	4,0	0,99997	