Aufg 1a

$$(\bar{\bar{A}} \vee B) \wedge \bar{A} \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \bar{A} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(A \wedge \bar{A})}_{0} \vee (B \wedge \bar{A}) \Leftrightarrow B \wedge \bar{A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\bar{B} \vee A}$$

$$\Leftrightarrow B \Rightarrow A$$

$\circledast$

$\circledast$ alle 3 Endlsg. gleich gut

Aufg 1

K2019-03

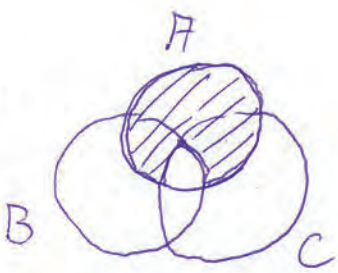
b) (i) (91^9999 - 30*20) mod 9 = (1^9999 - 3*2) mod 9
= (1-6+9) mod 9 = 4

(ii) $(2^{50}+3) \bmod 7$

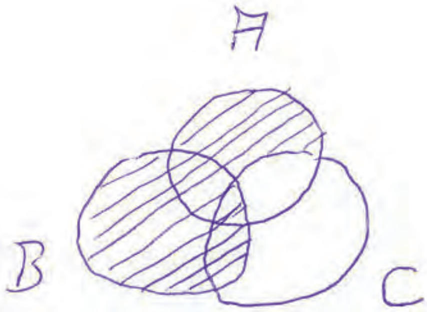
$= (2^2 \cdot 2^{48} + 3) \bmod 7$

$= (4 \cdot 8^{16} + 3) \bmod 7 = (4 \cdot 1^{16} + 3) \bmod 7 = \underline{\underline{0}}$

c) (i)



(ii)



Aufgabe 2

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n+2}+4n-5}{n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}+\frac{4n}{n}-\frac{5}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}}+4-\underbrace{\frac{5}{n}}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{5}{n}}_{\to 0}}$$

$$= \frac{1+4}{1} = 5$$

Achtung: Teilen durch höchste Potenz außerhalb der Wurzel "n" entspricht innerhalb der Wurzel durch "n^2" !

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$ Grenzwert v. Fkt.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

2. Lösungsweg: de l'Hospital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 0}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$$

Aufg. 2c

(b) $\ln[x(x+2)] = 0 \quad |\exp() \iff x(x+2) = 1$

$\iff x^2+2x+1 = 1+1 \iff (x+1)^2 = 2$

$\iff x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \implies$ nur $x_1 = -1+\sqrt{2} = \underline{\underline{0.414}}$

liegt im D von $\ln(x)$

(c) $\ln\left[\frac{x}{x+2}\right] = 0 \iff \frac{x}{x+2} = 1 \iff x = x+2 \quad \lightning$

$\implies$ <u>keine</u> Lösung für $x \in \mathbb{R}$

Lösung Klausur 12.7.22 Aufgabe 3

a) $f(x) = 1 + \sin(x^2) \qquad x_0 = 0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$1+\sin(x^2)$	1
1	$2x \cdot \cos(x^2)$	0
2	$2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$	2
3	$-4x \cdot \sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2)$	
	$= -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2)$	

$$T_2(x) = 1 + \frac{2}{2!}x^2 = 1+x^2$$

$$T_2(0.5) = 1 + 0.5^2 = 1.25$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + \sin\left(\tfrac{1}{4}\right) \approx 1.2474039$$

Restglied: $R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{C}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Abschätzung der 3. Ableitung:

$$f'''(x) \leq \left| -12 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 - 8 \cdot \tfrac{1}{2^3} \cdot 1 \right|$$

$$= |-6 - 1| = |-7| = 7$$

$C = 7$: $R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{48} \approx 0.1458$

Lösung Klausur 12.7.22 Aufgabe 3

b) Oberfläche Regenwassertonne

$$O(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h$$

$$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 200 \text{ Liter}$$

$$= 200000 \text{ cm}^3$$

$$h = \frac{200000}{\pi \cdot r^2}$$

$$O(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{200000}{\pi \cdot r^2}$$

$$= \pi \cdot r^2 + \frac{400000}{r}$$

$$O'(r,h) = 2\pi r - \frac{400000}{r^2}$$

$$O''(r,h) = 2\pi + \frac{800000}{r^3} > 0 \Rightarrow \text{MIN}$$

$$O'(r,h) = 0 \iff 2\pi r = \frac{400000}{r^2} \quad | \cdot r^2$$

$$\iff 2\pi r^3 = 400000 \quad | : 2\pi$$

$$\iff r^3 = \frac{400000}{2\pi} = \frac{200000}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{200000}{\pi}}$$

$$\approx 39.9279 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d = 79.8559 \text{ cm}$$

$$h = 39.9279 \text{ cm}$$

Lösung Klausur 12.7.22 Aufgabe 4

a) Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn das Skalarprodukt 0 wird

Nachprüfen: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 18$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal

b) x bestimmen, dass $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$-2 \cdot x + 3 \cdot (-1) + x^2 + (-4) \cdot 3 = 0$$

$$-2x - 3 + x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -3$$

Lösung Klausur 12.7.22 Aufgabe 4

c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

PP P(2|1) : $1 = 8a + 4b + 2c + d$

PP Q(1|3) : $3 = a + b + c + d$

P Min : $0 = 12a + 4b + c$

Q WP : $0 = 6a + 2b$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -8\times 1. \\ -12\times 1. \\ -6\times 1. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -23 \\ 0 & -8 & -11 & -12 & -3 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\times 2. \\ -1\times 2. \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$d = 5$

$c + 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow c = 0$

$-4b - 6 \cdot 0 - 7 \cdot 5 = -23 \Rightarrow b = -3$

$a - 3 + 0 + 5 = 3 \Rightarrow a = 1$

$y = x^3 - 3x^2 + 5$

Lösung Klausur 12.7.22 Aufgabe 5

a) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

$f_x(x,y,z) = 2x \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$f_y(x,y,z) = 2y \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$f_z(x,y,z) = 2z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$f_x(1,1,1) = 2 \cdot e^3$ $\qquad dx = 0{,}1$

$f_y(1,1,1) = 2 \cdot e^3$ $\qquad dy = -0{,}1$

$f_z(1,1,1) = 2 \cdot e^3$ $\qquad dz = 0.15$

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$
$$= 2 \cdot e^3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot e^3 \cdot (-0{,}1) + 2 e^3 \cdot 0.15$$
$$= 2 \cdot e^3 (0{,}1 - 0.1 + 0.15)$$
$$\approx 6.02566$$

$f(1,1,1) = e^3 = 20{,}085536$

$f(1{,}1; 0.9; 1.15) = e^{1{,}1^2 + 0.9^2 + 1.15^2}$

$= e^{3.3425} = 28{,}28976$

$\Delta f = 8{,}20422$

Lösung Klausur 12.7.22 Aufgabe 5

b) $\int 4x \cdot \sin(2x^2+2)\,dx$

Integration durch Substitution

$$u = 2x^2+2$$

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

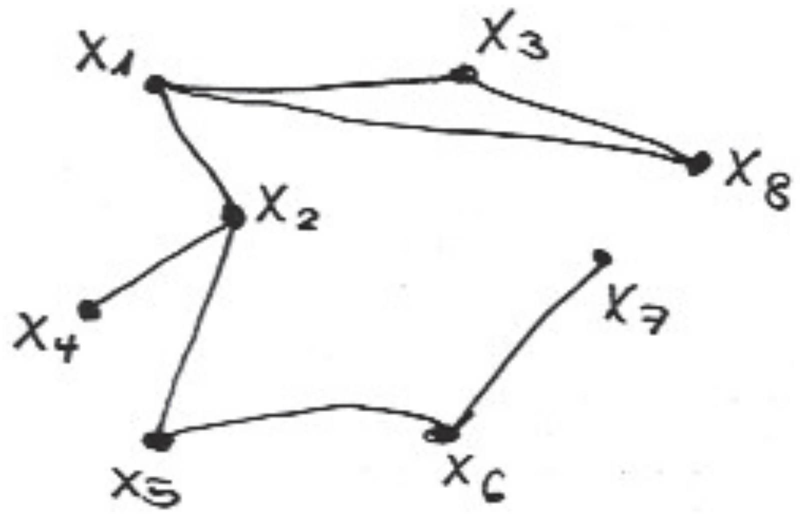
$$du = 4x\,dx$$

$$\int \sin(u)\,du$$

$$F(x) = -\cos(u) + C$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rücksubstitution}}}{=} -\cos(2x^2+2) + C,\; C \in \mathbb{R}$$

Lösung Klausur 12.7.22 Aufgabe 6



Knotengrad : 1 aufsummieren in Zeilen bzw. Spalten

schlicht : ja, keine Schlingen und keine Mehrfachkanten

zusammenhängend : ja, keine isolierte Knoten

vollständig : nein, da nicht jeder Knoten mit jedem über eine Kante verbunden ist.

Aufg. 7

a) $q_{0.25} = \frac{75+77}{2} = 76$, $q_{0.75} = \frac{102+107}{2} = 104.5$

Median $m = \frac{89+90}{2} = 89.5$

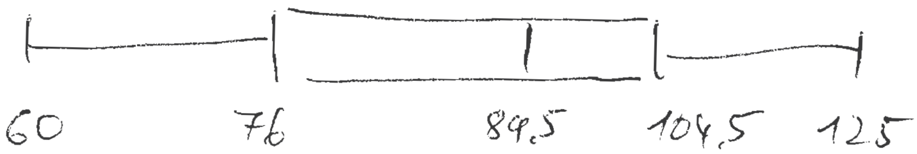
$1.5 \cdot IQR = 1.5 \cdot (104.5 - 76) = 42.75$

oberer Whisker: max. $104.5 + 42.75 = 147.5$

→ nehme Datenpunkt 125

unterer Whisker: min. $76 - 42.75 < 60$

→ nehme Datenpunkt 60



(keine Ausreißer)

Aufg 7b)

$n = 22$, $p = \frac{1}{5}$, $1-p = \frac{4}{5} = 0.8$

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \binom{22}{0} p^0 (1-p)^{22} + \binom{22}{1} p^1 (1-p)^{21}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0.8^{22} + 22 \cdot 0.2 \cdot 0.8^{21}$$

$$= \underline{\underline{0.047962}} \approx 4{,}796\ \%$$

K 2018 - 10

Aufg 7)

c) $0.33 = P(X > 58.5) = 1 - P(X \leq 58.5)$

$\Leftrightarrow \quad P(X \leq 58.5) = 0.67$

$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{58.5 - \mu}{\sigma}\right) = 0.67$ | Tabelle rückwärts $\Rightarrow z_q = 0.44$

$\Leftrightarrow \quad z_q = \frac{58.5 - \mu}{\sigma} = 0.44$ | $\sigma = 2$

$\Leftrightarrow \quad \mu = 58.5 - 2 \cdot 0.44$
$= \underline{\underline{57.62}}$

Aufgabe 8

a) $z_1 = -1 \in \mathbb{C}$ $\qquad z_1 = -1 + 0 \cdot i$

$$z = z_1^{1/5} = \sqrt[5]{-1}$$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \qquad \sqrt[5]{1} = 1$$

$$\varphi = 180^\circ \quad \text{bzw. } \pi$$

$$z_{11} = 1 \cdot e^{i\,36^\circ}$$

$$z_{12} = 1 \cdot e^{i(36^\circ + 72^\circ)} = e^{i\,108^\circ}$$

$$z_{13} = 1 \cdot e^{i(36^\circ + 2 \cdot 72^\circ)} = e^{i\,180^\circ}$$

$$z_{14} = 1 \cdot e^{i(36^\circ + 3 \cdot 72^\circ)} = e^{i\,252^\circ}$$

$$z_{15} = 1 \cdot e^{i(36^\circ + 4 \cdot 72^\circ)} = e^{i\,324^\circ}$$

$$z_{11} = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ = 0.809 + 0.587 i$$

$$z_{12} = \cos 108^\circ + i \sin 108^\circ = -0{,}309 + 0.951 i$$

$$z_{13} = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1 + 0 \cdot i = -1$$

$$z_{14} = \cos 252^\circ + i \sin 252^\circ = -0.309 - 0.951 i$$

$$z_{15} = \cos 324^\circ + i \sin 324^\circ = 0.809 - 0.587 i$$

Probeklausur SS 2019 Lösungen

(i) homogen, linear, 2. Ordnung, mit konst. Koeffizienten

Aufgabe 8b(ii)

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$ $\quad y' = \lambda e^{\lambda x}$ $\quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

$$e^{\lambda x} \underbrace{(\lambda^2 + 5\lambda + 6)}_{\text{char. Gleichung}} = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \qquad \lambda_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$\lambda_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

Allg. Lösung $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$