K 25.9.2008

Aufg. 1 a) $|x-1| > 0 \iff x \neq 1$

$x(x-1) \geq 0 \iff [x \geq 0 \wedge (x-1) \geq 0] \vee [x \leq 0 \wedge (x-1) \leq 0]$

$\iff x \geq 1 \vee x \leq 0$

$x^2 - 4 \neq 0 \iff x \neq 2 \wedge x \neq -2$

$\Rightarrow D_f = \left[(-\infty, 0] \cup (1, \infty)\right] \setminus \{-2, 2\}$

b) $\sin(x) > 0 \iff x \in \{x \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n}-1}\right] = 4$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{12 + \frac{2}{n^2}\sin(n)}{(3+\frac{2}{n})(1-\frac{1}{n})}\right] = \frac{12}{3} = 4$

also Grenzwert 4

d) Bei $12 \to 21$ wird 2. Grenzwert zu 7 $\Rightarrow$ insgesamt hat Folge keinen GW

Aufg. 2 a) $E_1: x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = -x_2$
$x_2 = x_2$
$x_3 = x_3$

$E_1 := \left\{\vec{x} \mid \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

b) $g: \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \wedge \\ x_2 + x_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$x_1 = -x_2$
$x_2 = -1 - x_3$
$x_3 = x_3$
$x_1 = +1 + x_3$

$\boxed{g: \left\{\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix}+1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$

c) in E_1: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}+1\\-1\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \vec{0} + \lambda\vec{0}$ ✓

in E_2: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}+1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$ ✓

| K 25.9.2008 |

$\ln(x^3) = 3\ln(x)$

Aufg. 3 (Taylor)

(a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\sin(\pi x) + 3\ln(x)$	0
1	$\pi\cos(\pi x) + 3x^{-1}$	$-\pi + 3$
2	$-\pi^2\sin(\pi x) + (-3x^{-2})$	-3
3	$-\pi^3\cos(\pi x) + 6x^{-3}$	$+\pi^3 + 6$
4	$+\pi^4\sin(\pi x) - 18x^{-4}$	

$$T(x) = (3-\pi)(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{\pi^3+6}{6}(x-1)^3$$

(b) $f^{(4)}(x)$ streng monoton fallend in $[0.8, 1.5]$, also Max bei $f^{(4)}(0.8)$, Min bei $f^{(4)}(1.2)$

$$\left.\begin{array}{l} f^{(4)}(0.8) = 13.31 \\ f^{(4)}(1.2) = -65.94 \end{array}\right\} \Rightarrow C = \max|f^{(4)}(u)| = 65.94$$

$$R(x) = \frac{C}{4!}(x-1)^4 = \underline{\underline{2.7(x-1)^4}}$$

Aufg. 4

[modifiziert aus K(2006-09-25)] K 25.9.2008

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -6 & +\lambda & 1 \\ 1 & -10 & (1+\lambda) & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{I}-Z_1 \\ \text{I}-Z_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 4+\lambda & 0 \\ 0 & -8 & 5+\lambda & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{I}-2Z_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 4+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \det A = 4(3+\lambda)$$

a) keine eindeutige Lsg für $\lambda = -3$

b) x_3 bel.; $-4x_2 + (4+(-3))x_3 = 0 \iff x_2 = \frac{1}{4}x_3$

$x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1 \iff x_1 = 1 + \frac{9}{2}x_3 = 1 + \frac{9}{2}\cdot 4x_2$

$= 1 + 18x_2$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) ja, man setze $x_3 = 1 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lsg

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 4+\lambda & 0 \\ 0 & -8 & 5+\lambda & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{I}-2Z_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 4+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Aufg. 5

weil Intervallmitte

weil dort Integral $= 0$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$f(x,y) \approx f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(x-1) + f_y(1,1)\cdot(y-1)$$

$$= 1 + 2x\Big|_{x=1}(x-1) - e^{\sin(t)\sin(t)}\Big|_{t=1}(y-1)$$

$$= 1 + 2\cdot(x-1) - \underbrace{e^{\sin^2(1)}}_{=e^{0{,}708} = 2.03}\cdot(y-1)$$

$\underbrace{}_{+0.203}$ $\underbrace{}_{-0.203}$

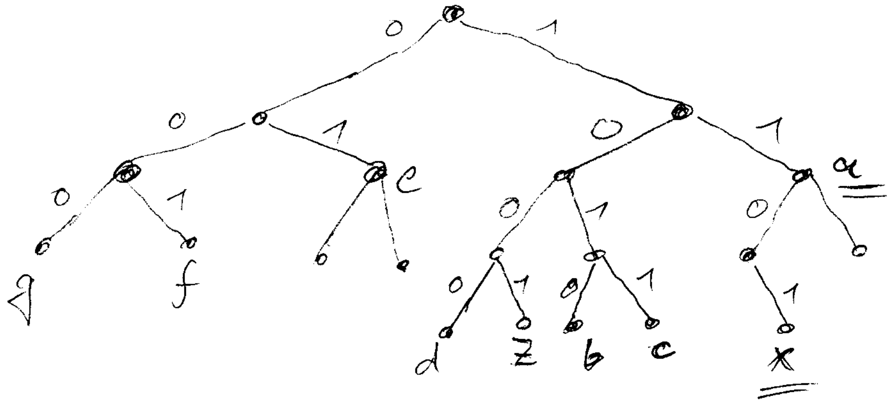
x \ y	0.9	1.0	1.1
0.9	1.003	0.8	0.597
1.0	1.203	1.0	0.797
1.1	1.403	1.2	0.997

[K 31.03.08] + [K 25.09.08]

Afg. 6

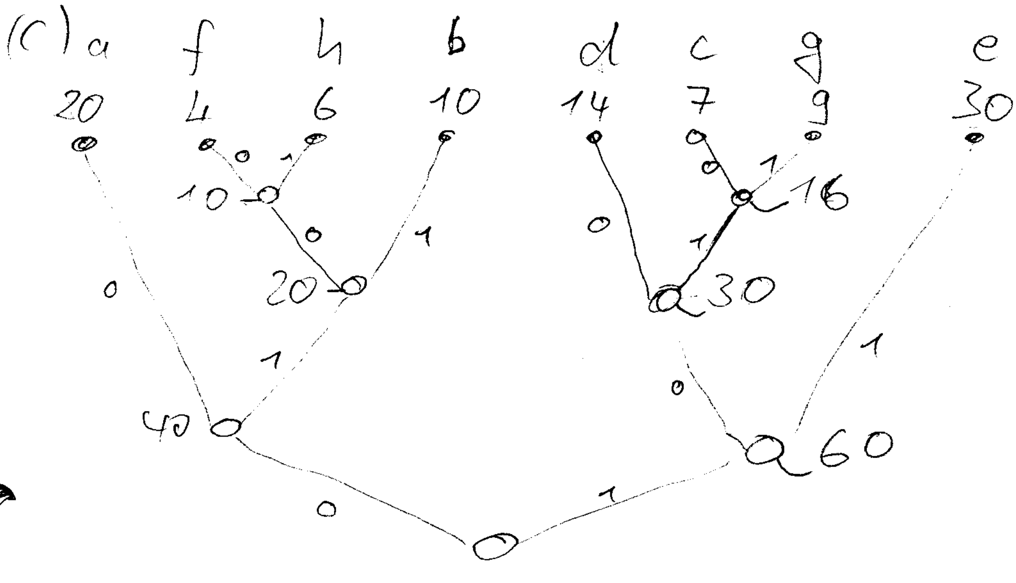
(a) Kein Wort ist Anfang eines anderen Wortes

(b)



{a, x} verletzt Präfixcode

(c)



2 Ziffern: a, e
3 " : d, b
4 " : f, h, c, g

Alt. Lsg.

e	30	e	30	e	30	e	30	e	30
a	20	a	20	a	20	a	20	dgc	30
d	14	d	14	gc	16	bhf	20	a	20
b	10	b	10	d	14	gc	16	bhf	20
g	9	hf	10	b	10	d	14		
c	7	g	9	hf	10				
h	6	c	7						
f	4								

60

40

K 25.09.2008

NDI

Aufg. 8 $\quad y'(x) + y(x) = 6x$

b) allg. Lsg. hom. DGL: Ansatz $e^{\lambda x}$

$\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$y_h = Ce^{-x}$

spez. Lsg. $y_p = 6x + A$

$y_p'(x) = 6$

$6 + \cancel{6x} + A = \cancel{6x}$

$\Rightarrow A = -6$

$\Rightarrow$ allg. inhom. Lsg. $\boxed{y(x) = 6x - 6 + Ce^{-x}}$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

a) 1. Ordn., implizit, linear, konst. Koeff.

(Begründung muss noch hinzu)

Aufg. 7 a) 10^5

b) $10 \cdot 9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdot 6} = 30\,240$

c) bei a) 10^3 Passw. mit "12.." $\Rightarrow p = \frac{10^3}{10^5} = 1\%$

bei b) $8 \cdot 7 \cdot 6$ " " $\Rightarrow p = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} > 1\%$

$= 336$

d) E(bleiben) = x

E(wechseln) $= 0.5 \cdot \frac{x}{2} + 0.5 \cdot 2x = 1{,}25x$

x = Betrag im 1. Umschlag. Also wechseln!

(konkret sei z.B. $x = 100$ €)

Probe Aufg. 8

$y'(x) + y(x) = \cancel{6} \cancel{- Ce^{-x}} + 6x \cancel{- 6} \cancel{+ Ce^{-x}} = 6x$ ✓