Fachprüfung AI / TI / MI   Mathematik 1 + 2 – Probeklausur 12i
Prof. Dr. Wolfgang Konen – FH Köln, Institut für Informatik
16.03.2009

Aufgaben 1-4 sind die Mathe 1 Klausur (60 min)
Aufgaben 5-8 sind die Mathe 2 Klausur (60 min)

Name:_________________ Vorname: ___________________

Matr.-Nr.:______________ Unterschrift:__________________

Klausurdauer: 2 x 60 min.

Hilfsmittel: Formelsammlung Mathematik
Rezepte Mathe 1+2
nicht-grafikfähiger Taschenrechner

Hinweise:
1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muß nachvollziehbar sein (nur Ergebnis reicht nicht!).
4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Aufgaben		**max. Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	**Zahlen und Grenzwerte**	**12**	
2	**Determinante**	**9**	
3	**Kurvendiskussion**	**14**	
4	**Lineare Algebra**	**15**	
5	**Extremwerte**	**13**	
6	**Statistik**	**12**	
7	**Graphen / Komplexe Zahl**	**14**	
8	**Differentialgleichung**	**11**	
9			
Punktzahl Gesamt:		**100**	

Aufgabe 1 Zahlen und Grenzwerte

Berechnen Sie:

a) Wieviele Stellen (vor dem Komma) haben 2^{567} und 3^{1000} ?

b) Ein Thermoelement hat einen Widerstand R, der mit seiner Temperatur T in Beziehung steht über $R = \dfrac{1}{1-e^{T/100}}$. Wenn eine Messung R = 50 ergibt, wie hoch ist die Temperatur T ?

c) $(3\cdot 7 + 78^{925} - 4)\bmod 7$ und $((17\cdot 17)^{250} + 3 - 3\cdot 7)\bmod 4$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x^2+4x}{x+1} - \dfrac{3x^2+x}{x-1}\right]$

Aufgabe 2 Determinante

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k & 1-z^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (-1)^k z^2 \end{pmatrix} = \left(\vec{\mathbf{a}}_1 \quad \vec{\mathbf{a}}_2 \quad \vec{\mathbf{a}}_3\right)$ mit $z\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{N}$.

a) Welche geometrische Bedeutung hat $|\det(A)|$, wenn man die Spalten der Matrix als Vektoren auffasst?

b) Berechnen Sie den Wert $|\det(A)|$ in Abhängigkeit von z und k. Für welche z nimmt $|\det(A)|$ den minimalen Wert ein? Wo hat $|\det(A)|$ lokales Maximum?

c) Für welche z und k stehen der 2. und der 3. Spaltenvektor, $\vec{\mathbf{a}}_2$ und $\vec{\mathbf{a}}_3$, senkrecht aufeinander?

Aufgabe 3 Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\dfrac{|x|-2}{x+2}$

(a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von f(x)

(b) Führen Sie für f(x) eine verkürzte Kurvendiskussion durch, welche enthält:

- Grenzwertverhalten bei $\pm\infty$ und an Definitionslücke(n),
- Extremstellen,
- Wendepunkte.

(c) Machen Sie zum Abschluss eine qualitative Skizze der Funktion!

Aufgabe 4 Lineare Algebra

Eine Ebene wird durch $E = \left\{ \vec{\mathbf{x}} \,\middle|\, \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 1 \right\}$ eindeutig festgelegt. Setzt man für $\vec{\mathbf{n}}$ nacheinander die drei Vektoren $\vec{\mathbf{n}}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{n}}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{n}}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ein, so erhält man drei Ebenen E_A, E_B, E_C.

(a) Wie nennt man den Vektor $\vec{\mathbf{n}}$ in der Analytischen Geometrie?
(b) Berechnen Sie den/die Schnittpunkt(e) der drei Ebenen. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es mit dem **Gauss'schen Eliminationsverfahren**.
(c) Interpretieren Sie die erhaltene Lösung: Was bedeutet die Lösung anschaulich, wie kann man in Wort oder Bild erklären, wie die drei Ebenen zueinander stehen?
(d) Können zwei Ebenen, deren Normalenvektoren Vielfache voneinander sind, eine gemeinsame Schnittgerade haben?

Aufgabe 5 Extremwerte

Die Studentin Lara will unbedingt die nächste Klausur in Mathematik bestehen. Hierzu muss sie ihren Wissensstand W verbessern. Ihr Wissensstand W ist eine Funktion der Anzahl t der Lerntage und der Menge d (in g) einer von ihr konsumierten Wunderdroge. Es gilt:

$$W = W(d,t) = 200 + 8d^2 + 6t - \tfrac{1}{3}d^3 - 0.5t^2$$

Wie soll Lara ihre Lernzeit und die Wunderdroge einsetzen, damit ihr Wissensstand beweisbar maximal wird? Welchen Wissensstand erreicht sie dann?
[Hinweis: Sie müssen nur das richtige lokale Optimum finden, die Ränder brauchen Sie nicht zu betrachten!]

Aufgabe 6 Statistik

Es sei bekannt, dass das Gewicht von maschinell hergestellten Schrauben (μ,σ)-normalverteilt ist mit $\sigma = 1$ g.

(a) Erklären Sie den Begriff "(μ,σ)-normalverteilt" in eigenen Worten!
(b) Welches mittlere Gewicht haben die Schrauben, wenn ferner bekannt ist, dass 30% der Schrauben weniger als 5.5 g wiegen?
[Hinweis: Wert aus Tabelle nach Methode "nächster Nachbar" ablesen]
(c) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube genau 7 g wiegt?

Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung (Ausschnitt):

Fachprüfung AI / TI / MI Mathematik 1 + 2 – Probeklausur 12i
Prof. Dr. Wolfgang Konen – FH Köln, Institut für Informatik
16.03.2009

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

$\Phi(1) = 0.8413$

Aufgabe 7 Graphen / Komplexe Zahlen

(a) Erklären Sie folgende Begriffe der Graphentheorie: Baum, Wurzelbaum, Länge eines Wurzelbaumes.

(b) Wieviele Kanten hat der größtmögliche binäre Wurzelbaum mit Länge 3 ? Mit Länge 4 ? Wie lautet die allgemeine Formel für Länge N ?

(c) Erklären Sie die Begriffe: Betrag einer komplexen Zahl, Phase einer komplexen Zahl, konjugiert komplexe Zahl. Geben Sie Ihre Erklärung sowohl mit Wort (Formel) als auch mit Bild.

(d) Wie lautet der Imaginärteil von $z = \frac{4-3i}{2+4i} + 3i$?

Aufgabe 8 Differentialgleichung

Gegeben sei die Differentialgleichung: $y'(x) + 3y(x) = 12$

(a) Interpretieren Sie die Differentialgleichung (Ordnung, explizit/implizit, linear, homogen/ inhomogen), jeweils mit einem Begründungssatz.

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wieviele freie Parameter hat sie? Skizzieren Sie eine typische Lösung qualitativ.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $y(x) = 4 + ae^{\lambda x}$

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangsbedingung $y(\frac{1}{3}) = 3$.