Probeklausur für das Praktikum Mathematik WS 14/15 18.12.2014

Diese Klausur vermittelt Ihnen einen Eindruck über den möglichen Umfang und die mögliche Themenauswahl. Es können aber auch durchaus andere Themen in den einzelnen Aufgaben behandelt werden. Eine Themenabgrenzung findet in der Regel 14 Tage vor der Klausur statt.

Bearbeiten Sie diese Aufgaben möglichst selbstständig, so dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen beim Abnahmetermin vorzutragen und Fragen zu Ihren Ausführungen zu beantworten.

Aufgabe 1 (Aussagenlogik, modulare Arithmetik, Grenzwerte)

a) Stellen Sie für jeden der beiden folgenden aussagenlogischen Ausdrücke eine Wahrheitstafel auf. Was fällt auf?

$$(A \to B) \wedge (\overline{B}) \to \overline{A}$$

$$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$$

b) Berechnen Sie $\left(12^5 \cdot 23^4\right) \bmod 5$

c) Berechnen Sie folgenden Grenzwert für $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1 + 6n + 2n^2}{(n+3) \cdot n} \right)$

d) Berechnen Sie folgenden Grenzwert für $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1} \right) \right)$

Aufgabe 2 (Ungleichungen/Definitionsbereich)

a) Geben Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung an: $|x-1| < |2x-3| - 1$

b) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich folgender Funktion an:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x^2 + 4x}$$

Aufgabe 3 (Taylorentwicklung/Extremwerte)

a) Berechnen Sie annähernd die **Eulersche Zahl e**, indem Sie die Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ in ein **Taylorpolynom 6. Grades** entwickeln! Welchen Wert müssen Sie für x in das Taylorpolynom einsetzen? Wie genau ist diese Annäherung? Schätzen Sie den Fehler mit der **Restgliedformel von Lagrange** ab! (Hinweis: Sie dürfen e<3 verwenden)

b) Eine Designerdose habe die Form einer Halbkugel mit aufgesetztem Zylinder und oben einem flachen Deckel. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit die Dose bei einer Oberfläche von 500 cm^2 ein möglichst großes Volumen hat? Machen Sie sich zur Verdeutlichung der Aufgabenstellung eine Skizze.

Aufgabe 4 (Vektoren/ Matrizen/ Lineare Gleichungssysteme)

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **mit**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die durch diese drei „Punkte“ geht:

i) in der Punkt-Richtungs-Form

ii) in der Koordinatenform

b) Die drei Autofirmen A,B,C produzieren Kleinwagen (K), Mittelklassewagen (M) und Oberklassewagen(O) pro Jahr eine konstante Zahl jeder Klasse, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist:

	K	M	O
A	1000	1500	500
B	1500	1000	600
C	700	1400	800

Für jedes Auto nehmen die Firmen eine gewisse Summe ein, und zwar durch Preisänderungen in den Jahren 2011-2014 unterschiedliche Beträge (in €), wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist:

	2011	2012	2013	2014
K	9900	10000	10500	11000
M	19000	19500	20000	21000
O	30000	31000	31500	33000

Berechnen Sie die Einnahmen der Firmen in den Jahren 2011-2014 mit Hilfe der **Matrizenrechnung**.

c) Eine **ganzrationale Funktion 4. Grades** verläuft durch den Punkt (-2/-4) und besitzt im Ursprung des Koordinatensystems ein relatives Minimum. Die Steigung ihrer Tangente an der Nullstelle x=-1 beträgt 3. Stellen Sie alle notwendigen linearen Gleichungen auf.

(Hinweis und Ausblick: Die Aufgabe könnte in der Klausur dann noch weiter gehen, in dem Sie dieses lineare Gleichungssystem dann mit dem Gauß'schen Lösungsalgorithmus lösen sollen. Zum jetzigen Zeitpunkt fehlen Ihnen die Kenntnisse hierzu!)