Fachprüfung AI / TI / MI Mathematik 1 + 2 – Probeklausur 12g
Prof. Dr. Wolfgang Konen – FH Köln, Institut für Informatik
09.07.2007

Aufgaben 1-4 sind die Mathe 1 Klausur (60 min)
Aufgaben 5-8 sind die Mathe 2 Klausur (60 min)

Name:_________________ Vorname: ___________________

Matr.-Nr.:______________ Unterschrift:__________________

Klausurdauer: 2 x 60 min. **Hilfsmittel**: Formelsammlung Mathematik
Rezepte Mathe 1+2
nicht-grafikfähiger Taschenrechner

Hinweise:
1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muß nachvollziehbar sein.
4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Aufgaben		max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	Gleichung	14	
2	Grenzwerte	11	
3	Taylor	10	
4	Lineare Algebra	15	
5	Gradient	14	
6	Baum und Präfixcode	14	
7	Statistik	9	
8	Fourierreihe	13	
Punktzahl Gesamt:		100	

Aufgabe 1 Gleichung

Wie lautet die Definitions- und die Lösungsmenge für $x \in \mathbf{R}$, wenn gilt: $\frac{1}{\sqrt{4x-3}} = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{8-x}}$

Aufgabe 2 Grenzwerte

Berechnen Sie den Grenzwert:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\binom{n}{2}}{2n^2-50}+\left(\dfrac{3n}{n+1}-\dfrac{n}{1-n}\right)\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2)\sin^2(x)}{(1-\cos(x))\ln(x)}$

Aufgabe 3 Taylor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T(x)$ zum Grad 4 von $f(x)=\ln(x^2)+3(x-2)^2$ an der Stelle $x_0=1$.
[Hinweis: Terme der Form $(x-1)^n$ brauchen nicht weiter ausgerechnet zu werden]

Aufgabe 4 Lineare Algebra

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_2+9x_3&=-1\\ 2x_1-x_2+4x_3&=1\\ 4x_1-x_2-x_3&=1\\ 6x_1-x_2-6x_3&=1 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in der Form $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ mit geeigneten Matrizen / Vektoren **A, x** und **b**. Wieviele Zeilen und wieviele Spalten hat der Vektor **x**?
(b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren nach **x** auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

Aufgabe 5 Gradient

Gegeben sei die Funktion

$$E(x,y)=-(x-1)^2-\frac{4}{x-1}+9y^2\cos y-2y^3 \quad \text{für } (x\neq 1).$$

und Sie stehen am Punkt $(x,y)=(4,1)$.
(a) Machen Sie in der xy-Ebene einen Schritt der Länge 1 in Richtung des steilsten **Ab**stieges. Welche Koordinaten hat Ihr neuer Standort Punkt P_1?
(b) Machen Sie vom Punkt P_1 aus einen weiteren Schritt der Länge 1 in Richtung des nun steilsten **An**stieges. Bei welchem Punkt P_2 landen Sie? Ist P_2 identisch mit Ihrem Startpunkt $(4,1)$? Wenn nein, warum nicht?

[Rechnen Sie jeweils auf 3 Nachkommastellen genau (mit Runden)]

Aufgabe 6 Baum und Präfixcode

(a) Definieren Sie den Begriff **Präfixcode**.
(b) Gegeben sei der Code
a=11, b=1010, c=1011, d=1000, e=01, f=001, g=000, x=1101, z=1001

Zeichnen Sie den Binärbaum dieses Codes und geben Sie ALLE Buchstabenpaare an, die die Bedingungen eines Präfixcodes verletzen.

(c) Konstruieren Sie einen Huffman-Code für das Alphabet {a,b,c,d,e,f,g,h} mit der Häufigkeitsverteilung

	a	b	c	d	e	f	g	h	Summe
Häufigkeit in %	20	10	7	14	30	4	9	6	100

Notieren Sie für jeden Buchstaben, ob sein Codewort aus 2, 3, 4 oder mehr Ziffern besteht.

Aufgabe 7 Statistik

40% aller Ehen in Deutschland sind kinderlos. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 80)$ befinden sich unter 182 auf gut Glück ausgewählten Ehepaaren höchstens 80 kinderlose? Benutzen Sie als Näherung die Normalverteilung (**Satz von Moivre-Laplace**) und begründen Sie, warum diese Näherung hier erlaubt ist.

Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ s. nä. Seite

noch Aufgabe 7

Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung (Ausschnitt):

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

$\Phi(1) = 0.8413$

Aufgabe 8 Fourierreihe

Die Fourierkoeffizienten einer T-periodischen Funktion f lauten $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-inx} dx$

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3 + e^{-5ix}$ für $-\pi \leq x < \pi$, die periodisch auf **R** fortgesetzt wird. Bestimmen Sie das Fourierpolynom 6. Grades $F(x)$ in komplexer und trigonometrischer Darstellung und geben Sie die Koeffizienten a_n, b_n und c_n an.

(b) Nennen Sie 3 wesentliche Eigenschaften, in denen sich die Approximation durch Taylorreihe und die Approximation durch Fourierreihe unterscheiden!