Fachprüfung AI / TI / MI Mathematik 1 + 2 – Probeklausur 1g
Prof. Dr. Wolfgang Konen / Ane Schmitter – FH Köln, Institut für Informatik
Probeklausur Mathe 1 Prak WS09

Hinweise zu den Lösungen der einzelnen Aufgaben 4.1.10

Aufgabe 1 (Grenzwerte)

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3}{1+n^2+4n^3}+\frac{n^5}{6+n^4-n^5}\right)$

Grenzwert einer Folge:
Berechnung der Grenzwerte der einzelnen Summanden:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3}{1+n^2+4n^3}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{6+n^4-n^5}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\frac{n^3}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}+4\frac{n^3}{n^3}}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^5}{n^5}}{\frac{6}{n^5}+\frac{n^4}{n^5}-\frac{n^5}{n^5}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{-1}\right)=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+5}{\cos(x)}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)$

Grenzwert einer Funktion, unbestimmter Ausdruck im zweiten Faktor!

2 Lösungsmöglichkeiten:

1. Faktor klar, Grenzwert ist 5/1=5

2.Faktor

Entweder Erweitern des Bruchs wie folgt:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1-1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}\right)=\frac{1}{2}$$

Oder de l'Hospital

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)=\frac{1}{2}$$

Der Grenzwert insgesamt lautet dann 5/2

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(2x-1)}{e^x}\right)$

unbestimmter Ausdruck, daher de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{l\frac{1}{2x-1}\cdot 2}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cdot 2}{(2x-1)e^x}\right)=0$$

Aufgabe 2 (Gleichungen/Ungleichungen)

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen/Ungleichungen:

a) $|4x-1|=-2x+4$
Visualisieren Sie diese Gleichung durch eine Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem.

Fall 1: 4x-1>0 →x>1/4

Auflösen von 4x-1=-2x+4 ergibt x=5/6

Fall 2: 4x-1<0 →x<1/4

Auflösen von -4x+1=-2x+4 ergibt x<-3/2

b) $\sqrt{5-x}+3-x=0$

$\sqrt{5-x}=x-3$ Quadrieren und anschließendes Lösen der quadratischen Gleichung liefert zwei Lösungen: 4 und 1
Durch Überprüfen stellt man fest, dass nur 4 Lösung ist

c) $(x-2)^2 \le |x|$
Visualisieren Sie diese Ungleichung durch eine Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem.

Fall 1: $x \ge 0 : (x-2)^2 \le x$
Auflösen ergibt x=4 oder x=1

Fall 2: $x < 0 : (x-2)^2 \le -x$

Auflösen ergibt eine negative Diskriminante, daher keine weiteren Lösungen

$L = [1;4]$

Aufgabe 3 (Taylorentwicklung/Extremwerte)

a) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe bis einschließlich zur 3. Potenz um den Entwicklungspunkt 0 von folgender Funktion:

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

Wie groß ist der betragsmäßige Fehler an der Stelle x=0,1?

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$
$$f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$$
$$f''(x) = e^{\sin(x)}(\cos^2(x) - \sin(x))$$
$$f'''(x) = e^{\sin(x)}(\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin(x) - \cos(x))$$
$$f^{(4)}(x) = e^{\sin(x)}(\cos^4(x) - 3\cos^2(x)\sin(x) - \cos^2(x)) - 3\cos^2(x)\sin(x) + 3\sin^2(x) - 3\cos^2(x) + \sin(x)$$

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = 1$$
$$f''(0) = 1$$
$$f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(0) = -3$$
$$f^{(4)}(0,1) = -6,1176$$

Gesuchtes Polynom: $P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0 \cdot x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Fehler ist kleiner als $\left| \frac{6,117}{4!} 0,1^4 \right| = 0,00002548$

Vielleicht habe ich mich auch etwas verrechnet.....

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -ax^2 + b \qquad (a,b > 0)$

Gesucht ist ein Rechteck, dessen linke untere Ecke im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt und dessen rechte obere Ecke auf dem Graphen der gegebenen Funktion liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten der rechten oberen Ecke so, dass die Rechtecksfläche maximal wird.
(**Tipp**: Machen Sie sich zur Verdeutlichung der Aufgabenstellung zunächst eine Skizze)

$0 \le x \le \sqrt{\frac{b}{a}}$

$A(x) = x(-ax^2 + b)$

$A'(x) = -3ax^2 + b$

$A''(x) = -6ax$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}$

Es kommt nur die positive Lösung in Frage, Einsetzen in A''(x) ergibt Maximum

Die Koordinaten des Eckpunktes lauten:

$\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}; \frac{2}{3}b\right)$

Aufgabe 4 (Matrizen/Lineare Gleichungssysteme)

a) Gegeben ist folgender dreistufiger Produktionsprozess: Aus den vier Rohstoffen R1 bis R4 werden fünf Zwischenprodukte Z1 bis Z5 hergestellt und aus diesen die drei Endprodukte E1 bis E3. Der Materialfluss pro Mengeneinheit eines jeden Produkts ist in folgenden Tabellen zusammengestellt (Anm.: Aus der dritten **Tabelle** entnehmen Sie, dass auch Rohstoffe direkt für die Endprodukte benötigt werden!)

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
R1	1	2	1	0	1
R2	1	0	4	2	0
R3	3	1	1	0	0
R4	0	2	0	1	2

	E1	E2	E3
Z1	2	0	1
Z2	1	1	2
Z3	0	3	1
Z4	1	0	4
Z5	0	1	0

	E1	E2
R2	1	3
R4	2	1

- Wie lautet die Matrix, die den Gesamtverbrauch der einzelnen Rohstoffe für die Endprodukte darstellt?
- Wie viele Rohstoffe sind nötig, damit 50 ME des Endproduktes E1, 200 ME E2 und 100 ME E3 hergestellt werden können?

(ME=Mengeneinheiten)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \\ 7 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \\ 7 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 5 & 15 & 13 \\ 7 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 5 & 15 & 13 \\ 7 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 4550 \\ 1750 \\ 2050 \end{pmatrix}$$

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist bezüglich der y-Achse symmetrisch. Er geht durch den Punkt A(4;-3) und hat in B(2;0) einen Wendepunkt. Berechnen Sie unter Verwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens die Gleichung dieser ganzrationalen Funktion.
(Tipp: Arbeiten Sie nach Aufstellen des Gleichungssystems der Übersichtlichkeit halber mit der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems)

Ansatz

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\text{Symmetrie}: y = ax^4 + cx^2 + e$$

$$y' = 4ax^3 + 2cx$$

$$y'' = 12ax^2 + 2c$$

Punktprobe mit den beiden Punkten und x=2 in 2. Ableitung einsetzen liefert:

$$-3 = 256a + 16c + e$$

$$0 = 16a + 4c + e$$

$$0 = 48a + 2c$$

Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix:

Fachprüfung AI / TI / MI Mathematik 1 + 2 – Probeklausur 1g
Prof. Dr. Wolfgang Konen / Ane Schmitter – FH Köln, Institut für Informatik
Probeklausur Mathe 1 Prak WS09

$$\begin{matrix} 256 & 16 & 1 & -3 \\ 16 & 4 & 1 & 0 \\ 48 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 256 & 16 & 1 & -3 \\ -240 & -12 & 0 & 3 \\ 48 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 256 & 16 & 1 & -3 \\ 20 & 1 & 0 & -1/4 \\ 48 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 256 & 16 & 1 & -3 \\ 20 & 1 & 0 & -1/4 \\ 8 & 0 & 0 & 1/2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 256 & 16 & 1 & -3 \\ 20 & 1 & 0 & -1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1/16 \end{matrix}$$

$$a = \frac{1}{16} \qquad c = -\frac{3}{2} \qquad e = 5$$

Die ganzrationale Funktion lautet: $y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$