Aufgabe 1

Mittwoch, 23. Februar 2011
06:13

a) $(\overline{A} \Rightarrow B) \wedge \overline{A} \Leftrightarrow (\overline{\overline{A}} \vee B) \wedge \overline{A}$

$\Leftrightarrow (A \wedge \overline{A}) \vee (B \wedge \overline{A})$

$\Leftrightarrow 0 \vee (B \wedge \overline{A})$

⊛ $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow B \wedge \overline{A} \\ \Leftrightarrow \overline{\overline{B} \vee A} \Leftrightarrow \overline{B \Rightarrow A} \end{array} \right.$

b) $(3 \cdot 7 + 78^{925} - 4) \bmod 7 = (3 \cdot 0 + 1^{925} - 4) \bmod 7$

$= (1 - 4) \bmod 7 = -3 \bmod 7 = \underline{\underline{+4}}$

$(2^{501} + 37) \bmod 4 = (2 \cdot 2^{2 \cdot 250} + 1) \bmod 4$

$= (2 \cdot 4^{250} + 1) \bmod 4 = (2 \cdot 0 + 1) \bmod 4 = \underline{\underline{1}}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{3n^2 + 4n}{n+1} - \frac{3n^2 + n}{n-1} \right] =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{(3n^2 + 4n)(n-1) - (3n^2 + n)(n+1)}{n^2 - 1} \right] =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\cancel{3n^3} + 4n^2 - 3n^2 - 4n - (\cancel{3n^3} + n^2 + 3n^2 + n)}{n^2 - 1} =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{-3n^2 - 5n}{n^2 - 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-3 - \underbrace{5 \cdot \frac{1}{n}}_{0}}{1 - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}} = \underline{\underline{-3}}$

⊛ alle 3 Endlösungen gleich gut

Aufgabe 2

Mittwoch, 23. Februar 2011
06:33

a) Def. ber.: $16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 16 \geq x^2$

$\Leftrightarrow |4| \geq |x|$

$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = 0 \quad \Big| \cdot 2\sqrt{16-x^2}, \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}\sqrt{16-x^2} - \cancel{2}x \cdot 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16-x^2} = 2\sqrt{2}\,x \quad \Big| ()^2$$

$$\Rightarrow 16 - x^2 = 8x^2$$

$$\Leftrightarrow 16 = 9x^2$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$$

Probe: $\sqrt{16 - \frac{16}{9}} = 2\sqrt{2}\left(\pm\frac{4}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{16 \cdot 9 - 16}{9}} = \pm \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{16 \cdot 8}}{3} = \pm \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}\sqrt{2} = \pm \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Probe ist nur für $x_1 = +\frac{4}{3}$ wahr

$$f''(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}\,(-1) - (-x) \cdot \frac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{16-x^2}}}{16-x^2}$$

$$= \frac{-(16-x^2) - x^2}{(16-x^2)^{3/2}} = \frac{-16}{(16-x^2)^{3/2}}$$

Wg $f''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0$ ist bei $x = \frac{4}{3}$ lokaler Extremwert mit $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{4}\,2}{3} + \frac{8}{3}\sqrt{2}$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{8}{3}\sqrt{2} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$$

$$= 4.243$$

Aufgabe 2 (Forts.)

Mittwoch, 23. Februar 2011
07:11

b) $g(x) = x - 4 - \sqrt{6-x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 4 = \sqrt{6-x} \qquad | \; ()^2$

$\Rightarrow \quad (x-4)^2 = 6 - x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 6 - x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{40}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x - \frac{7}{2} = \pm \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 2$

Probe: $5 - 4 - \sqrt{1} = 0$ ✓

$2 - 4 - \sqrt{4} = -4 \neq 0$ ↯

Einzige Nullstelle ist $\underline{\underline{x = 5}}$

Lösung Aufgabe 3

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

$\vdots$

$f^{(9)}(0) = e^0 = 1$

$f^{(10)}(0) = e^0 = 1$

$$T_9(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^9}{9!}$$

Restgliedabschätzung für $x = 1$:

$$|R_9(1)| = \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!} x^{10} \qquad \xi \in [0,1]$$

$e^0 = 1$

$e^1 = e < 3$

$$|R_9(1)| \leq \frac{3}{10!} \cdot 1^{10}$$

$= 0.000000826$

d.h. auf 6 Stellen genau

Lösung Aufgabe 4

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Kurvenpunkte $(0|0)$, $(2|0)$

$f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$

$f(2) = 0 \Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$

$(2|0)$ Sattelpunkt, also Tangente waagrecht

$f'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 12b + 2c = 0$

$f''(2) = 0 \Rightarrow 48a + 12b + 2c = 0$

$f'(0) = 4 \Rightarrow d = 4$

Anfangstableau:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 32 & 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 48 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

bzw. einfacher:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & -8 \\ 32 & 12 & 4 & -4 \\ 48 & 12 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \times 1.2 \\ -3 \times 1.2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & -4 & 12 \\ 0 & -12 & -10 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ : -4 \quad \mathrm{II}' \\ +12 \times \mathrm{II}' \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ : 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & -8 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$c = -6$

$b - 6 = -3 \Rightarrow b = 3$

$16a + 24 - 24 = -8$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 4x$