Zufallsvariablen rekapituliert

Wolfgang Konen

TH Köln, Campus Gummersbach

April 2016 – Mai 2019

Einleitung

(Diese Folien dienen als Ergänzung zum Skript MA2, nicht als dessen Ersatz.)

Kombinatorik: Man muss Wahrsch. P für jedes Ereignis neu rechnen

- z.B. 6 Richtige, 5 Richtige, 4 ... im Lotto
- $\rightarrow$ mühsam

Zufallsvariablen: Erlauben es, über viele Ereignisse gemeinsam nachdenken

- Voraussetzung: Es gibt einen Zahlenwert, den man jedem Ereignis zuordnen kann
- z.B. $x_m = 6, 5, 4, \ldots$ beim Lotto
- $\rightarrow$ einfacher zu rechnen
- $\rightarrow$ geht auch für unendlich viele x_m ($\mathbb{Z}$: abzählbar oder $\mathbb{R}$: überabzählbar viele)

Begriffe

Zufallsvariable: ist eine ***Funktion*** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (keine Variable)

Wahrscheinlichkeitsdichte: ist eine ***Funktion*** $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

- zusätzliche Eigenschaft: $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 1$

Erwartungswert, Varianz: $E(X)$ und $Var(X)$ sind bloße reelle Zahlen

- (genauso wie $f(x)$ für Funktion f eine Zahl ist)

Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$)	**stetig** ($x_m \in \mathbb{R}$)
Wahrscheinlichkeit: $$\begin{aligned} w_m &= P(X = x_m) \\ &= P(x_{m-1} < X \leq x_m) \end{aligned}$$	Wahrscheinlichkeitsdichte: $$\begin{aligned} w(t)\Delta t &= \\ & \qquad P(t - \Delta t < X \leq t) \end{aligned}$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m = 1 \qquad (1)$$	$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t_m)\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 1 \qquad (2)$$ $(t_m = t_{m-1} + \Delta t)$

Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret	**stetig**
Verteilungsfunktion F	
$$\begin{aligned} F(x_m) &= P(X \leq x_m) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{m} w_k \qquad (3) \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \leq t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} w(t')dt' \qquad (4) \end{aligned}$$
Erwartungswert $E(X)$	
$$E(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m w_m \qquad (5)$$	$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, w(t)dt \qquad (6)$$

Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft $\mu = E(X)$.

Der **diskrete Erwartungswert** $E(X) = \sum_m x_m w_m$ nach Gl. (5) wichtet jeden Wert x_m von X mit seiner Wahrscheinlichkeit w_m.

Beispiel: Hat X die Werte $x_m = 0$ und 10 mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 0) = 95\%$ und $P(X = 10) = 5\%$, so ist der Erwartungswert

$$E(X) = 0 \cdot 95\% + 10 \cdot 5\% = 0.5$$

BEACHTE: Auch wenn alle $x_m \in \mathbb{Z}$, so ist i.allg. $E(X) \notin \mathbb{Z}$.

Der **stetige Erwartungswert** nach Gl. (6) benutzt das Integral, das der Grenzwert einer Summe mit $\Delta t \to 0$ ist (siehe Gl. (2)).

Linearität Erwartungswert

Folgende Sätze und Definitionen gelten gleichartig für diskrete und stetige Zufallsvariablen:

Satz 10-6 Linearität Erwartungswert

Seien X, Y Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Beweis diskret Beweis stetig

Varianz einer Zufallsvariablen (diskret & stetig)

Def 10-15
Hat X den Erwartungswert $E(X) = \mu$ so ist die **Varianz** von X:

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.

Die Varianz gibt an, wie sehr die Ergebnisse für X um den Wert $E(X)$ herum streuen: gar nicht (Varianz Null), wenig (Varianz klein) oder viel (Varianz groß).

diskret	**stetig**
$Var(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x_m - \mu)^2 w_m$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 w(t) dt$

Formeln Varianz

Diese Sätze zu Varianz gelten für diskrete und stetige Zufallsvariablen:

Satz 10-7 Alternative Varianzformel

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{7}$$

Beweis

Satz 10-8 Linearität Varianz
Seien X eine Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \tag{8}$$

Anschaulich klar: „$+b$“ ändert nichts an der Varianz einer Zufallsvariablen, „$a\cdot$“ ändert die Breite (Standardabweichung) um Faktor a, die Varianz also um Faktor a^2. Beweis

Anhang

Beweis Linearität Erwartungswert, diskret

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit Werten x_m, y_n und Wahrscheinlichkeiten $w_m^{(X)}, w_n^{(Y)}$:

1. $$\begin{aligned} E(aX+b) &\overset{(5)}{=} \sum_m (ax_m+b)w_m^{(X)} \\ &= a\left(\sum_m x_m w_m^{(X)}\right) + b\left(\sum_m w_m^{(X)}\right) \\ &\overset{(5),(1)}{=} aE(X)+b \end{aligned}$$

Beweis Linearität Erwartungswert, diskret (2)

2. $$E(X+Y) = \sum_n \sum_m (x_m + y_n) w_m^{(X)} w_n^{(Y)} \tag{9}$$
$$= \left(\sum_m x_m w_m^{(X)}\right)\left(\sum_n w_n^{(Y)}\right) + \left(\sum_m w_m^{(X)}\right)\left(\sum_n y_n w_n^{(Y)}\right)$$
$$\overset{(1)}{=} E(X)\cdot 1 + 1 \cdot E(Y)$$

Warum in Gl. (9) die Doppelsumme und das Produkt $w_m^{(X)} w_n^{(Y)}$?

- Doppelsumme, weil wir alle Werte von X kombiniert mit allen Werten von Y durchlaufen müssen.
- Produkt, weil wir die Wahrscheinlichkeit für $(X = x_m \wedge Y = y_n)$ durch Zerlegung in Teilprobleme erhalten: Erst Wert x_m für X festlegen, dann Wert y_n für Y $\rightarrow$ Produktregel liefert $w_m^{(X)} w_n^{(Y)}$.

Zurück

Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Seien X, Y stetige Zufallsvariablen mit Werten t, u und Wahrscheinlichkeitsdichten $w_X(t), w_Y(u)$:

1. ... (als Übung)
2. $$E(X+Y)$$
$$\overset{(6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (t+u) w_X(t) w_Y(u) dt du$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot w_X(t)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_Y(u)\right) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_X(t)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} u \cdot w_Y(u)\right)$$
$$\overset{(6),(2)}{=} E(X)\cdot 1 + 1 \cdot E(Y)$$

Zurück

Beweis Alternative Varianzformel

$$
\begin{aligned}
Var(X) &\overset{(D10-15)}{=} E\left((X - E(X))^2\right) \\
&= E\left(X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\right) \\
&\overset{(S10-6)}{=} E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Zurück

Beweis Linearität Varianz

$$
\begin{aligned}
Var(aX + b) &\overset{(D10-15)}{=} E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right) \\
&\overset{(S10-6)}{=} E\left((aX + b - (aE(X) + b))^2\right) \\
&= E\left((aX - aE(X))^2\right) \\
&= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) \\
&\overset{(S10-6)}{=} a^2 E\left((X - E(X))^2\right) \\
&\overset{(D10-15)}{=} a^2 Var(X) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Zurück