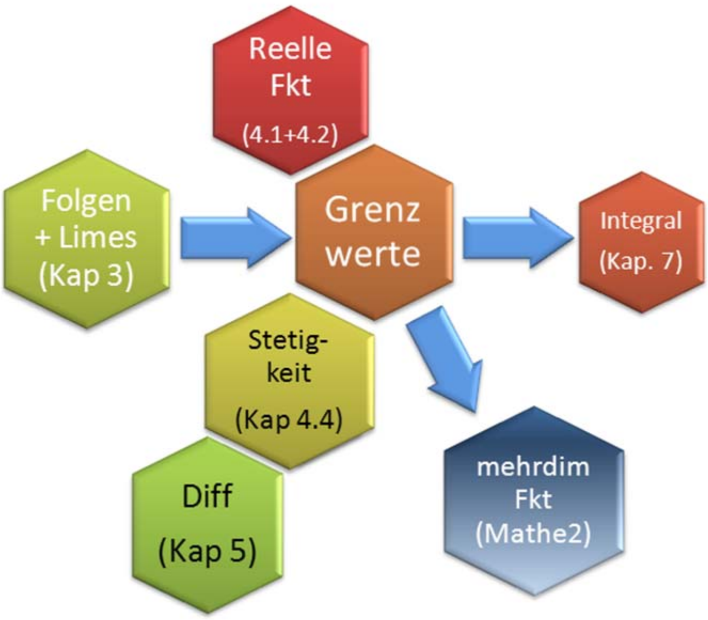
3. Zahlenfolgen

3.1. Wozu InformatikerInnen Folgen brauchen

- Konvergenz von Folgen ist die Grundlage der Analysis (Differential- und Integralrechnung)
- Transzendente Gleichungen wie $x \ln x = 50$ kann man näherungsweise über Folgen lösen (**Fixpunkt-Iteration**)
- Jede **Simulation** im Computer zerlegt die Zeit in kleine Schritte und berechnet somit Folgen $f(t_0)$, $f(t_1)$, $f(t_2)$, ... >> WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme.
- **Laufzeit von Algorithmen**, Worst-case-Abschätzung durch obere Abschätzung zu bekannten Folgen. Oftmals schreibt man ein Programm und kann es für kleine Mengen (z.B. n=10) austesten, aber in der Praxis wird es mit viel größeren Mengen (z.B. n=1.000.000) laufen. Wie ist das Verhalten im Grenzwert großer Zahlen? Dies führt auf Folgen und die **Landausche O()-Notation**.

Einordnung:



Erstes **Beispiel**: Für dieselbe Aufgabe braucht ein Algorithmus A $100n + n^2$ Schritte, ein Algorithmus B braucht $3n^2 - 5$ Schritte. Welcher Algorithmus ist für große n schneller?

Zweites **Beispiel**: Ein Mitarbeiter Ihrer Abteilung hat herausgefunden, dass es für ein bestimmtes Optimierungsproblem zwei mögliche Algorithmen gibt, deren Laufzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße n wie folgt skaliert:

Algorithmus C: $C_n = \dfrac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50}$

Algorithmus D: $D_n = \dfrac{(n+1)!\,n}{(n-1)!\,(n+1)^2}$

Welchen Algorithmus nehmen Sie, wenn Sie für sehr große n schneller sein wollen?

Die Sache ist im 2. Beispiel schwierig zu überblicken, wie löst man Aufgaben dieser Art systematisch?

Lösung in Vorlesung (am Ende des Kapitels 3)

3.2. Definition und Eigenschaften von Folgen

Wir hatten ja bereits zur Definition reeller Zahlen den Begriff der Zahlenfolge benötigt. In diesem Kapitel soll der Begriff weiter vertieft werden.

Def D3-1: Zahlenfolge

Unter einer (unendlichen) Zahlenfolge versteht man eine eindeutige Abbildung der Menge **N** der natürlichen Zahlen auf einen Zahlenbereich. $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} = a_1, a_2, a_3, \ldots$

Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißen Glieder der Folge, a_n ist das n-te Glied.

Beispiel:

$$1.)\ a_n = \tfrac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\ (a_n) = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots \quad (\text{Bem.}: a_n \to 0)$$

Weitere Beispiele in Vorlesung

Def D3-2: Monotonie von Folgen

Eine Folge heißt:

monoton wachsend (↑), falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \le a_{n+1}$

streng monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n < a_{n+1}$

monoton fallend (↓), falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \ge a_{n+1}$

streng monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n > a_{n+1}$

Def D3-3: Beschränktheit von Folgen

Sei $n \in \mathbf{N}$. Eine Folge heißt:

nach oben beschränkt (n.o.b.), falls ein $K \in R$ existiert, so daß für alle n gilt: $a_n \le K$

nach unten beschränkt (n.u.b.), falls ein $k \in R$ existiert, so daß für alle n gilt: $a_n \ge k$

beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiele:

$$1.)\, a_n = \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\, (a_n) = 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{5}, \ldots$$

Die Folge ist streng monoton wachsend und beschränkt, z.B. k = 0, K = 1.

$$2.)\, a_n = \frac{n}{2^n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\, (a_n) = \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{4}{16}, \ldots$$

Die Folge ist monoton fallend und beschränkt, z.B. k = 0, K = 1.

3.3. *Grenzwert einer Zahlenfolge*

Einführungsbeispiel $(a_n) = (1 - \frac{1}{n})$ in Vorlesung

Def D3-4: Grenzwert einer Folge

g heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Existiert der Grenzwert einer Folge, dann heißt die Folge **konvergent**. Man schreibt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g \qquad \text{oder} \qquad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} g$$

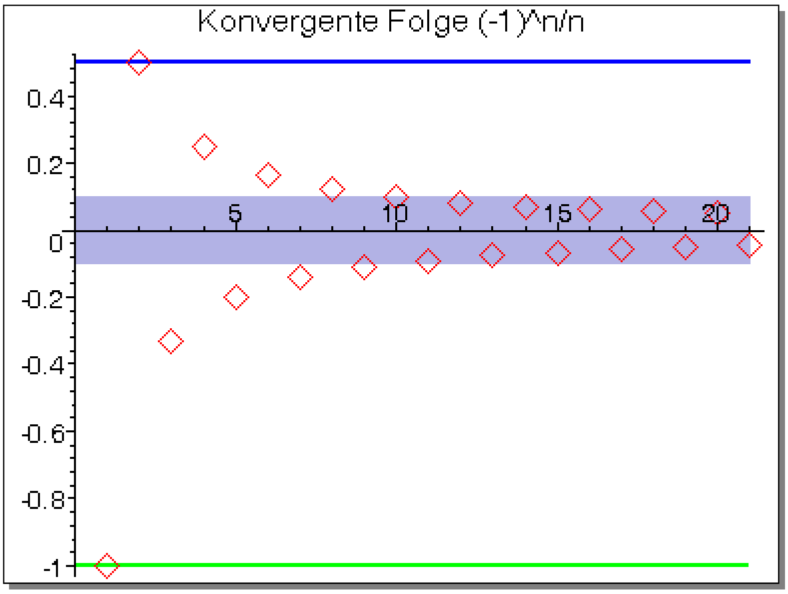
Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt **divergent**.

Anschaulich: Gibt es einen "ε-Band", in dem schließlich alle Folgenglieder liegen?

BEACHTE: Grenzwert und (obere/untere) Schranke sind nicht dasselbe!! Die Folge

$$(a_n) = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

hat die untere Schranke -1, die obere Schranke +1/2 und den Grenzwert 0:

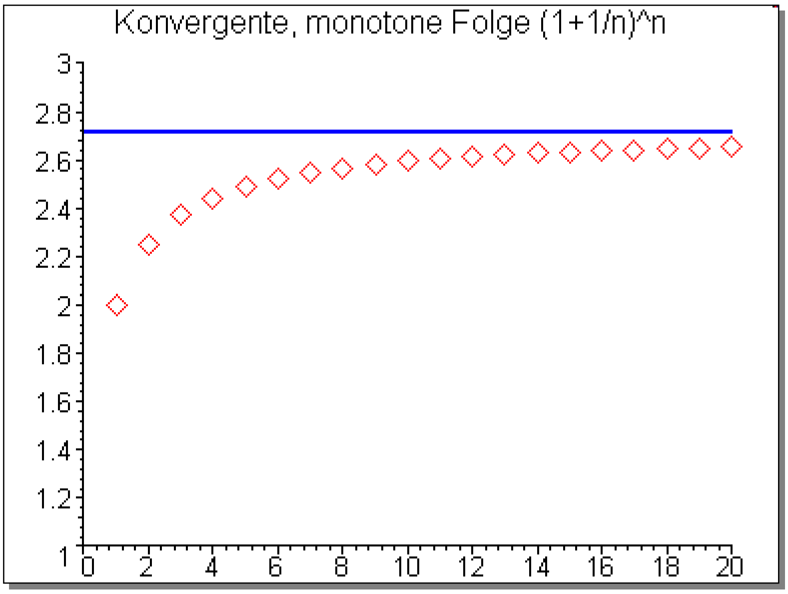


Es gilt:

Satz S3-1	Eine konvergente Folge ist beschränkt.

nur muss eben der Grenzwert nicht mit oberer/unterer Schranke zusammenfallen.

Wenn allerdings die Folge monoton wachsend ist, dann stellt ein Grenzwert auch eine obere Schranke dar:



(Dass diese Folge monoton ist, ist nicht selbstverständlich, man kann es aber zeigen)

Die logische Umkehrung des Satzes ist manchmal auch nützlich:

Satz S3-2	Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

Beispiele für Grenzwerte:

1.) $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$

d.h. $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ "Nullfolge"

Beweis in Vorlesung

2.) $a_n = \frac{2n-1}{3n}, n \in \mathbf{N}$

d.h. $(a_n) = \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \ldots$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{3}$

3.) $a_n = 1 - (-1)^n, n \in \mathbf{N}$

d.h. $(a_n) = 2, 0, 2, 0, 2, ..$

$\Rightarrow$ (a_n) ist divergent

BEACHTE: Nicht jede divergente Folge ist auch unbeschränkt (!!)

4.) $a_n = n^2 + 5, n \in \mathbf{N}$

d.h. $(a_n) = 6, 9, 14, ..$

(a_n) ist nach **Satz S3-2** divergent, weil (a_n) nicht beschränkt ist. Man sagt dann, (a_n) besitzt den **uneigentlichen Grenzwert** ∞ oder $-\infty$, bzw. die Folge geht gegen ∞ oder $-\infty$.

(a_n) ist **bestimmt-divergent**. Schreibweise:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \text{ oder } \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

5.) $\lim\limits_{n \to \infty} n^\alpha = \infty$ falls $\alpha > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ falls } \alpha > 0$$

Beweis folgt weiter unten mit **Satz S 3-4** d),e).

6.) $$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ für } & |q| < 1 \\ 1 \text{ für } & q = 1 \\ \infty \text{ für } & q > 1 \end{cases} \quad \text{"geometrische Folge"}$$

Beweis s. [Stingl, S. 91]

Satz S 3-3	**Fundamentale Nullfolgen**	
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $\lvert q\rvert < 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$

Aus den elementaren Folgen lassen sich durch folgende Rechengesetze auch die Grenzwerte anderer Folgen berechnen:

Satz S 3-4 Rechengesetze für Grenzwerte

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n), \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $\text{für}(b_n \neq 0, b \neq 0)$ und $(a_n)^r$ für $r \in \mathbf{R}$

konvergent, und es gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$	d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$	e) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^r = a^r$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = ca$	

Rechentechnisch: Man kann den Limes auf die Einzelterme "nach innen ziehen":

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n)$$

Die Regeln von **Satz S 3-4** sind auch nutzbar, wenn Folgen a_n oder b_n gegen $\pm\infty$ "konvergieren", wenn man folgende Regeln verwendet

Satz S 3-5			
$c \pm \infty = \pm\infty$ $\pm\infty \cdot c = \pm\infty \quad (c>0)$	$\infty + \infty = \infty$ $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$	$\frac{c}{\pm\infty} = 0$	$(\infty)^c = \infty$ $(c>0)$

$c + \infty = \infty$ ist so zu verstehen: Eine Folge, die gegen c konvergiert, plus eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht, ergeben zusammen eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht.

Dagegen sind nachfolgende Ausdrücke "**unentscheidbar**", d.h. ohne weitere Untersuchung kann NICHTS ausgesagt werden:

$0 \cdot \infty = ?$	$\infty - \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$

Dann muss man durch geeignete Umformungen versuchen, zu einer entscheidbaren Situation zu kommen.

In Vorlesung werden Folgerungen aus **Satz S 3-4** und **Satz S 3-5** gezeigt.

Regeln für die Berechnung von Grenzwerten:

- Komplizierte Ausdrücke auf Summe / Produkt / Quotient bekannter Folgen (meist Nullfolgen und konstante Folgen) zurückführen.
(D.h. wenn möglich, den Limes "nach innen ziehen".)
- Bei Brüchen durch die größte Potenz **im Nenner** dividieren (**g.P.i.N.**).
- Wenn eine Summe von Termen die Situation $\infty - \infty$ ergibt, dann schauen, ob eine Zusammenfassung (z.B. auf gemeinsamen Hauptnenner) Klärung bringt.
- Schreibweise: Für $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7n^2-1\right)=\infty$ findet man auch die "Pfeildarstellung" $\left(7n^2-1\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Wann ist "nach innen ziehen" für Limes NICHT möglich? – Wenn dadurch eine "unentscheidbare" Situation (s. gelbe Tabelle nach **Satz S 3-5**) entsteht. Dann muss man versuchen, erst anderweitig zu vereinfachen.

Beispiele:

$$1.)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+4n-5}{8n^2-3n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{8-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-2)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(8)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{-2+0-0}{8-0+0}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

Hier haben wir zuerst „g.P.i.N.“ benutzt, damit konstante Folgen oder Nullfolgen entstehen und wir so den Limes nach innen ziehen dürfen.

Zur Übung: $2)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2-1}{3n^2+2}\right)^2$ $\qquad 3)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n-1}\right)$

$$4)\ \lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot 10^k+6\cdot 10^{2k}}{0.4\cdot 10^{k-3}-20\cdot 10^{2k-2}}$$

Regel: Bei Grenzwert-Betrachtung sind bei Summen die Terme niedriger Ordnung unwichtig.

Weitere Beispiele in Vorlesung:

1) Die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ ist konvergent. Der Grenzwert heißt **e (Eulersche Zahl)**.

2) **Rekursive Folge** $a_1 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right) = f\left(a_{n-1}\right)$ (sog. **Fixpunkt-Iteration**).

Die **Fixpunkt-Iteration** ist eine "quick-&-dirty"-Methode, um von nicht einfach lösbaren Gleichungen (sog. *transzendenten* Gleichungen) eine Lösung zu bestimmen:

1. Man bringt die Gleichung in die Form $a = f(a)$.
   (Hierfür gibt es oft zahlreiche Möglichkeiten, und man muss probieren, welche Lösung zum Ziel führt)
2. Jetzt startet man mit einem Wert a_1 und bestimmt $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, ... usw.
3. Wenn die Folge (a_n) einen Grenzwert a besitzt, dann ist a *eine* Lösung der transzendenten Gleichung.

Beispiel: Wir suchen eine numerische Lösung x für die Gleichung $x^2 = 2$.

Lösung: Sei $x \neq 0$. Wir addieren x^2 auf beiden Seiten und dividieren mit x durch:

$$2x^2 = x^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x + \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Ersetzen wir das x auf der linken Seite durch a_n und die x auf der rechten Seite durch a_{n-1}, so erhalten wir die obige rekursive Folge 2).

Wir können nun mit dem Taschenrechner (oder Excel) Werte einsetzen und erhalten:

(in Excel vormachen)

$a_1=1$, $a_2=1.5$, …, $a_6=1.41421356$

3.3.1. Landausche O()-Notation

[Teschl, Bd. 1, S. 204-210] oder [Hachenberger05, S. 383-387][2]

In der Informatik muss man oft die Laufzeit von Algorithmen abschätzen. Beispiel Matrixmultiplikation: Man braucht n^3 Multiplikationen und $n^2(n-1)$ Additionen, also insgesamt

$$a_n = 2n^3 - n^2$$

Operationen. Wie wächst die Laufzeit, wenn die Matrixgröße n (Zeilenzahl) steigt? Oft interessiert man sich für das Grenzwertverhalten großer n, und hier ist n^3 der dominante Term :

Def D3-5: Landausche O()-Notation

Seien $A=(a_n)$ und $B=(b_n)$, $b_n \neq 0$ Folgen. Wir definieren die Menge **"Groß-O" von B** durch

$$O(B) = O(b_n) = \{ (a_n) \mid \text{Der Quotient } \frac{a_n}{b_n} \text{ ist beschränkt} \}.$$

Man sagt dann: Die Folge A ist **"von der Ordnung O(B)"**, als Formel: $A \in O(B)$.

Für $A \in O(B)$ schreibt man üblicherweise (wenn auch ungenau) $A = O(B)$.

Beispiele:

1. $2n^3 - n^2 \in O(n^3)$, denn $\dfrac{2n^3 - n^2}{n^3} = 2 - \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$
2. $n+2 \in O(n)$, aber auch $n+2 \in O(n^2)$ oder $n+2 \in O(4n)$.
3. $6n\log(n) + 270\,n + 4 \in O(n\log(n))$

WARNUNG: Das Gleichheitszeichen in Aussagen mit der O()-Notation ist NICHT das Gleichheitszeichen der Arithmetik, sondern nur eine (ungenaue) Abkürzung für "$\in O(B)$". Denn aus A=O(B) und C=O(B) folgt NICHT A=B und NICHT A=C. Mit der O()-Notation drückt man aus, dass das die Folgen A, B und C **für große n** zur selben Wachstumsklasse (Menge) gehören.

Es gilt folgende Reihung für Wachstumsklassen:

$$O(1) < O(\log(n)) < O(n) < O(n\log(n)) < O(n^2) < O(n^2\log(n)) < \ldots < O(2^n)$$

Hierbei bedeutet z.B. $O(\log(n)) < O(n)$:

Für jeden Vertreter $a_n \in O(n)$ mit $a_n \notin O(\log(n))$ gilt: $\dfrac{a_n}{\log(n)}$ ist divergent.

Mit anderen Worten: $a_n \in O(n)$ wächst stärker als $c \cdot \log(n) \quad \forall c \in \mathbf{R}$.

[2] [Hartmann04, S. 245-249] bringt die O()-Notation auch, allerdings Schreibweise etwas unpräzise.

Übung: Ordnen Sie den Folgen ein möglichst einfaches und "billiges" O(B) zu.

	Folge	
(1)	$2n^3 - n^2$	***$O(n^3)$***
(2)	$7n^5 + 26n^6$	
(3)	$n + 3n^2 - 2n\log(n)$	
(4)	$\dfrac{n^4+n^2}{n+5}$	
(5)	$\dfrac{n^4+n^2}{n+5} - n^3$	

In Vorlesung oder Übung: Tabelle mit Vergleich verschiedener Laufzeitverhalten, weiteres Bsp. zu **Fixpunkt-Iteration**.

Übung: Lösen Sie die Aufgaben aus den Eingangsbeispielen und entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3: Welcher Algorithmus ist jeweils für große n schneller?

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$A'_n = 100n + \dfrac{n^2}{10!}$	$B'_n = \dfrac{3n^2-5}{10!}$
Fall 3	$C_n = \dfrac{100n^2 - 650n + 40}{2n+50}$	$D_n = \dfrac{(n+1)!\,n}{(n-1)!\,(n+1)^2}$

Hinweis: Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter“

3.4. Fazit zu Folgen

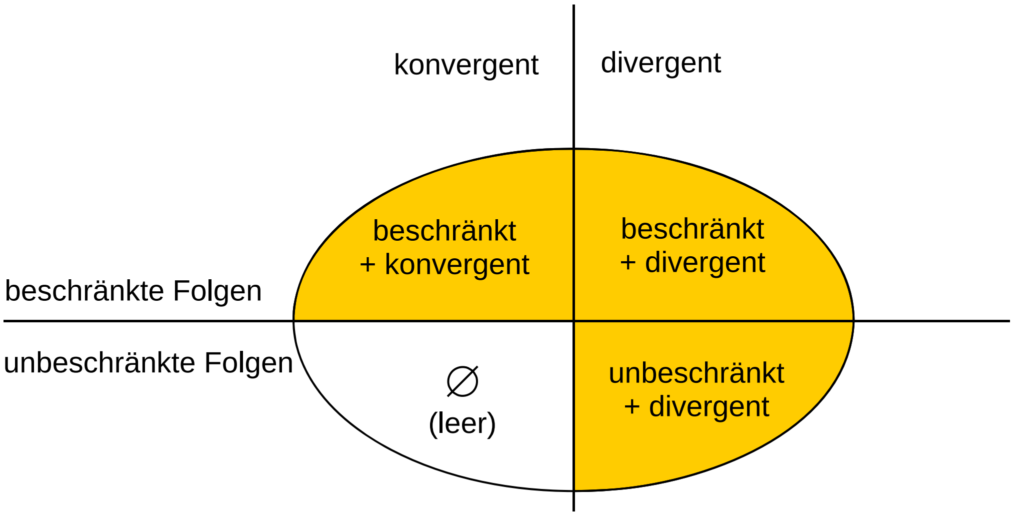
Wir haben in diesem Kapitel folgende Begriffe kennengelernt:

- Grenzwert: wenn schließlich alle Folgenglieder in einem "ε-Schlauch" liegen
- konvergente Folge: hat ein endliche Zahl als Grenzwert (Limes)
- divergente Folge: das Gegenteil
- bestimmt-divergente Folge: hat $+\infty$ oder $-\infty$ als Grenzwert (uneigentlicher G.)

Wichtiges Resultat:

- Mit Grenzwerten kann man rechnen: Operator $\lim\limits_{n\to\infty}$ vertauschbar mit den meisten Grundrechenoperationen.
- Techniken: g.P.i.N., Hauptnenner, …

Wir können folgende Systematik für Folgen erstellen:



Nachfolgend Ü-Fragen: jeweils DEM NACHBARN ERKLÄREN:

- Übung: Geben Sie für jeden der 3 möglichen Quadranten ein Beispiel an!
- Übung: Wahr oder falsch? (Begründen Sie Ihre Antwort):
  - Jede bestimmt-divergente Folge ist divergent.
  - Jede divergente Folge ist bestimmt-divergent.
  - Eine Folge ist entweder konvergent oder sie strebt gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$.
- Wäre nicht die Folge $(a_n) = \infty, \infty, ½, 1/3, ¼, \ldots$ ein Beispiel für eine unbeschränkte, aber doch konvergente Folge?