TH Köln Campus Gummersbach Mathematik I Prof. Dr. W. Konen Dr. A. Schmitter
WS 15/16

Übungsblatt 5: Lineare Algebra

Bereiten Sie die Aufgaben begleitend zu den besprochenen Themen in der Vorlesung jeweils für die nächste Übungsstunde ab dem 15./16.12.2015 vor
ACHTUNG: Am 6. Januar 2016 findet die Vorlesung wie gewohnt statt und von 13.-14.30 Uhr eine Übung für alle, am 5.1.2016 finden keine Übungen statt!

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden dreidimensionalen Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{u} - \vec{v}, \quad 2\vec{u} + 6\vec{w}, \quad 3\vec{w} - 5\vec{v}$

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} \in \mathrm{IR}^3$, der folgende Gleichung erfüllt:

$$3\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + 3\vec{w}$$

Aufgabe 2

a) Begründen Sie, warum für das **Skalarprodukt** das Assoziativgesetz **nicht** gilt.

b) Nehmen Sie die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aus Aufgabe 1 und berechnen Sie:

$$\text{(I)} \quad 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{w} \cdot \vec{u} \qquad \text{(II)} \quad \vec{v} \times \vec{w} + 2\vec{w}$$

Aufgabe 3

Wie muss man die Koordinate a_3 wählen, damit der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ die Länge 3 hat?

Aufgabe 4

Machen Sie sich noch einmal klar, was eine ***Basis*** eines n-dimensionalen Vektorraums ist. So ist zum Beispiel für n=3 jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis des IR^3. Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Basisvektoren ***linear kombinieren***. Falls es sich bei den Basisvektoren um die Einheitsvektoren handelt, sind die Koordinaten des Vektors genau die Linearfaktoren aus der Linearkombination. Wenn nun eine andere Basis gegeben ist (also nicht die Einheitsvektoren), so kann man bezüglich dieser anderen Basis ebenso die Linearfaktoren der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors bezüglich dieser Basis nehmen. Prüfen Sie, ob die drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Fortsetzung Aufgabe 4:

mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des IR^3 sind und bestimmen Sie dann die Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 5

Welche Winkel müssen die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ einschließen, damit folgendes gilt:

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Für welche Koordinate v_2 stehen die beiden Vektoren **senkrecht** aufeinander (=orthogonal)? Für welche Werte ist der Winkel größer als 90°?

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes M, der die Strecke zwischen dem Punkt P (5;8;1) und dem Punkt Q (-4;2;2) im Verhältnis 1 zu 2 teilt. Finden Sie einen geeigneten Lösungsansatz über die Parameterdarstellung einer Geraden aus der analytischen Geometrie.

Aufgabe 8

a) Untersuchen Sie, ob sich die beiden folgenden Geraden schneiden und bestimmen Sie dann den Schnittpunkt.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der folgenden Geraden g mit der Ebene E:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E: 5x+2y+4z-6=0$$

Fortsetzung Aufgabe 8:

c) Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen

E_1: x-2y+4z+2=0 und E_2: 2x-3y+z-5=0

Aufgabe 9

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 3{,}5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0{,}5 \\ 7 & 2 & 10 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie die Multiplikation durch!

Aufgabe 10

Die drei Autofirmen A,B,C produzieren Kleinwagen (K), Mittelklassewagen (M) und Oberklassewagen(O) pro Jahr eine konstante Zahl jeder Klasse, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist:

	K	M	O
A	1000	1500	500
B	1500	1000	600
C	700	1400	800

Für jedes Auto nehmen die Firmen eine gewisse Summe ein, und zwar durch Preisänderungen in den Jahren 2010-2013 unterschiedliche Beträge (in €), wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist:

	2012	2013	2014	2015
K	9900	10000	10500	11000
M	19000	19500	20000	21000
O	30000	31000	31500	33000

Berechnen Sie die Einnahmen der Firmen in den Jahren 2012-2015 mit Hilfe der Matrizenrechnung.

Aufgabe 11

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 17 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -9 \end{aligned}$$

Aufgabe 12

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus:***

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Berechnen Sie unter Verwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** die Gleichung der ***Parabel 2. Ordnung***

$$y = ax^2+bx+c$$

die durch die Punkte A(-1;4) , B(-2;-8) und C(3;2) verläuft.

Aufgabe 14

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Fortsetzung Aufgabe 14:

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 15

Berechnen Sie die $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$