Bereiten Sie die Aufgaben für die nächsten Übungsstunden so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen!

Übungsblatt 5 : Lineare Algebra

Aufgabe 5.1

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \qquad 6\vec{u} + 2\vec{w}, \qquad -\vec{v} + \vec{u}, \qquad (2\vec{u} - 7\vec{w}) - (8\vec{w} + \vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \overline{w}$

Aufgabe 5.2

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{w} \cdot \vec{x}$ (b) $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} + 2\vec{\mathbf{w}}$ (c) $(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}$

Bei Teilaufgabe b und c sollten Sie vorher die Berechnungsformeln für das Vektorprodukt für Vektoren in der dreidimensionalen Koordinatenschreibweise nachlesen und erarbeiten. Dies können Sie entweder im Skript von Herrn Prof. Konen tun, oder in anderen Lehrbüchern!

Mathematik I – Übungsblatt 5 WS 14/15 Dr. A. Schmitter

Bereiten Sie die Aufgaben für die nächsten Übungsstunden so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen!

Aufgabe 5.3

Machen Sie sich noch einmal klar, was eine **Basis** eines n-dimensionalen Vektorraums ist. So ist zum Beispiel für n=3 jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Basisvektoren **linear kombinieren**. Falls es sich bei den Basisvektoren um die Einheitsvektoren handelt, sind die Koordinaten des Vektors genau die Linearfaktoren aus der Linearkombination. Wenn nun eine andere Basis gegeben ist (also nicht die Einheitsvektoren), so kann man bezüglich dieser anderen Basis ebenso die Linearfaktoren der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors **bezüglich dieser Basis** nehmen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{bezüglich der} \quad \text{Basis} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.4

In der Vorlesung wurde das Skalarprodukt zweier Vektoren definiert:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ mit $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Eine andere Möglichkeit, das Skalarprodukt zu berechnen, ist die Formel über die Koordinatenschreibweise. Wenn Sie diese beiden Definitionen gleich setzen, so können Sie nach dem Kosinus des Winkels auflösen und somit den eingeschlossenen Winkel berechnen.

Es sind folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) den von $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$ eingeschlossenen Winkel

(b) die Winkel, die der Vektor $\vec{c}$ mit der x-Achse und mit der y-Achse einschließt. Berechnen Sie beide Winkel über die Formel.

Aufgabe 5.5

Welche Winkel müssen die Vektoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ einschließen, damit folgendes gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Mathematik I – Übungsblatt 5 WS 14/15 Dr. A. Schmitter

Bereiten Sie die Aufgaben für die nächsten Übungsstunden so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen!

Aufgabe 5.6

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **mit**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die durch diese drei „Punkte“ geht:

a) in der Punkt-Richtungs-Form
b) in der Koordinatenform
c) in der Hesse-Normalform

Aufgabe 5.7

Gesucht ist die Geradengleichung in Punkt-Richtungsform, die

a) durch den Punkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ geht und parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ verläuft
b) durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft
c) die x-Achse bei 5 schneidet und parallel zur z-Achse verläuft (bei Benennung der dreidimensionalen Koordinatenachsen mt x,y,z)

Aufgabe 5.8

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Mathematik I – Übungsblatt 5 WS 14/15 Dr. A. Schmitter

Bereiten Sie die Aufgaben für die nächsten Übungsstunden so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen!

Aufgabe 5.9

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3. Der wöchentliche Verbrauch der Rohstoffe während eines Monats ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Woche/Rohstoff	R1	R2	R3
1.Woche	8	4	12
2.Woche	10	6	5
3.Woche	7	8	5
4.Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen einem von zwei Lieferanten L1, L2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in folgender Tabelle angegeben sind (in virtuellen Geldeinheiten pro Mengeneinheit)

Rohstoff/Lieferant	L1	L2
R1	8	4
R2	10	6
R3	7	8

Vergleichen Sie die Rohstoffkosten für alle vier Wochen und entscheiden Sie, bei welchem Lieferanten die Firma bestellen soll.

Aufgabe 5.10

Ein Betrieb stellt aus drei Rohstoffen R1, R2, R3 in der ersten Produktionsstufe die drei Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 her. In der zweiten Stufe werden hieraus die vier Endprodukte E1, E2, E3, E4 gefertigt. Der Materialverbrauch beider Produktionsstufen beträgt:

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ R1 \\ R2 \\ R3 \end{array} \begin{pmatrix} Z1 & Z2 & Z3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{array}{c} \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{array} \begin{pmatrix} E1 & E2 & E3 & E4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Matrix, die für jede Einheit eines Endprodukts den Rohstoffverbrauch angibt

b) Welche Rohstoffmengen werden benötigt, wenn die folgenden Endproduktmengen

hergestellt werden: $P = \begin{array}{c} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{array} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$

Mathematik I – Übungsblatt 5 WS 14/15 Dr. A. Schmitter

Bereiten Sie die Aufgaben für die nächsten Übungsstunden so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen!

Aufgabe 5.11

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 17 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -9 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.12

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus:***

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.13

Berechnen Sie unter Verwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** die Gleichung der ***Parabel 2. Ordnung***

$$y = ax^2+bx+c$$

die durch die Punkte A(-1;4) , B(-2;-8) und C(3;2) verläuft.

Mathematik I – Übungsblatt 5   WS 14/15   Dr. A. Schmitter

Bereiten Sie die Aufgaben für die nächsten Übungsstunden so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen!

Aufgabe 5.14

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5.14

Berechnen Sie die $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$