Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Übungsblatt 5 : Lineare Algebra

Aufgabe 5.1 Vektoroperationen

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \qquad 6\vec{u} + 2\vec{w}, \qquad -\vec{v} + \vec{u}, \qquad (2\vec{u} - 7\vec{w}) - (8\vec{w} + \vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$

Aufgabe 5.2

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $4\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$ (b) $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} + 2\vec{\mathbf{w}}$ (c) $(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}$

Aufgabe 5.3 Vektoren – lineare Unabhängigkeit

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie, ob diese Vektoren eine Basis des $\mathbf{R}^3$ bilden.

Aufgabe 5.4

Machen Sie sich noch einmal klar, was eine **Basis** eines n-dimensionalen Vektorraums ist. So ist zum Beispiel für n=3 jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Basisvektoren **linear kombinieren**. Falls es sich bei den Basisvektoren um die Einheitsvektoren handelt, sind die Koordinaten des Vektors genau die Linearfaktoren aus der Linearkombination. Wenn nun eine andere Basis gegeben ist (also nicht die Einheitsvektoren), so kann man bezüglich dieser anderen Basis ebenso die Linearfaktoren der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors **bezüglich dieser Basis** nehmen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.5 Betrag von Vektoren

Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

Aufgabe 5.6 Ebenen

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) den von ($\vec{a}, \vec{b}$), bzw. von ($\vec{b}, \vec{c}$), eingeschlossenen Winkel,

(b) den Inhalt der von ($\vec{a}, \vec{b}$), bzw. von ($\vec{b}, \vec{c}$), aufgespannten Fläche (Parallelogramm),

(c) einen Normalenvektor $\vec{n}$ der durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene,

Aufgabe 5.7 Geraden und Ebenen

Gegeben seien die Punkte P_1, P_2, P_3, die durch die Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aus 5.6 gegeben sind, sowie die weiteren Punkte P_4 und P_5, die durch die Vektoren

$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben sind

(a) Stellen Sie die Gleichungen auf für die Ebene E_1, die durch $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ geht; für die Ebene E_2, die durch $\vec{f},\vec{g},\vec{a}$ geht; für die Gerade g, die durch $\vec{f},\vec{g}$ geht.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P von E_1 und g.

(c) Bestimmen Sie die Schnittgerade s von E_1 und E_2.

Aufgabe 5.8

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Aufgabe 5.9

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3. Der wöchentliche Verbrauch der Rohstoffe während eines Monats ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Woche/Rohstoff	R1	R2	R3
1.Woche	8	4	12
2.Woche	10	6	5
3.Woche	7	8	5
4.Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen einem von zwei Lieferanten L1, L2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in folgender Tabelle angegeben sind (in virtuellen Geldeinheiten pro Mengeneinheit)

Rohstoff/Lieferant	L1	L2
R1	8	4
R2	10	6
R3	7	8

Vergleichen Sie die Rohstoffkosten für alle vier Wochen und entscheiden Sie, bei welchem Lieferanten die Firma bestellen soll

Aufgabe 5.10

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 17 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.11

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus:***

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.12

Berechnen Sie unter Verwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** die Gleichung der ***Parabel 2. Ordnung***

$$y = ax^2+bx+c$$

die durch die Punkte A(-1;4) , B(-2;-8) und C(3;2) verläuft.

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 5.13

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5.14

Berechnen Sie die Menge der $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$