V4.VORKURSWISSEN: Funktionen

INHALT:

V4.1. Allgemeine Funktionseigenschaften

Def D 4-1 Nullstelle einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt in $x_0 \in D$ eine Nullstelle, falls $f(x_0) = 0$.

In einer Nullstelle schneidet oder berührt der Funktionsgraph die x-Achse.

Beispiel: $f(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2$

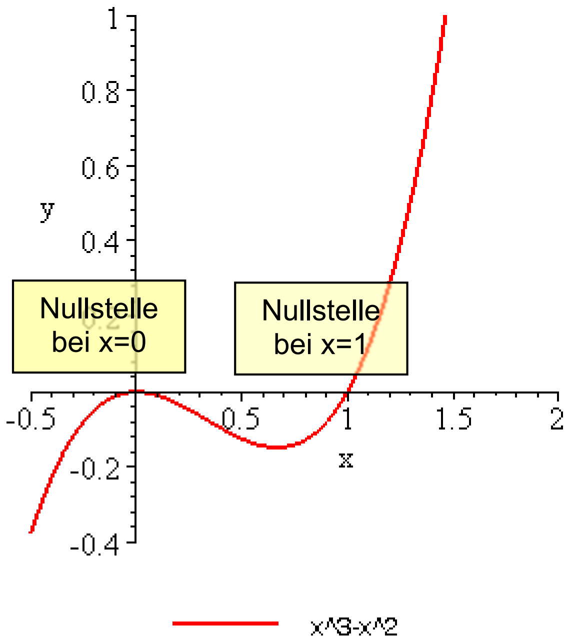


Abbildung 4-1: Funktionsverlauf der Funktion $f(x) = x^2(x-1)$

Die Funktion $f(x) = x^2(x-1)$ hat zwei Nullstellen und zwar $x_0=0$ und $x_0=1$ (siehe Diagramm).

Def D 4-2 Symmetrie: Gerade und ungerade Funktion

Sei $f(x)$ eine Funktion mit Definitionsbereich D derart, dass für alle $x \in D$ auch $-x \in D$ gilt.

$f(x)$ heißt **gerade**, falls gilt

$$\forall x \in D: \ f(x) = f(-x)$$

$f(x)$ heißt **ungerade**, falls gilt

$$\forall x \in D: \ f(x) = -f(-x)$$

Zur Namensgebung: "gerade", weil alle Polynome mit nur geraden Potenzen gerade Funktionen sind. "Symmetrie", weil eine gerade Funktion **spiegelsymmetrisch** zur y-Achse ist und wei eine ungerade Funktion **punktsymmetrisch** zum Ursprung ist

Beispiele:

1.) $y = |x|$ ist eine gerade Funktion, weil wegen $D = D_{max} = \mathbf{R}$ für alle $x \in D$ auch $(-x) \in D$ (Bedingung S) und $f(-x) - f(x) = |-x| - |x| = 0$ (Bedingung G) erfüllt sind.

2.) $y = x^3$ ist eine ungerade Funktion, weil wegen $D = D_{max} = \mathbf{R}$ für alle $x \in D$ auch $(-x) \in D$ (Bedingung U1) und $f(-x) + f(x) = (-x)^3 + x^3 = 0$ (Bedingung U) erfüllt sind.

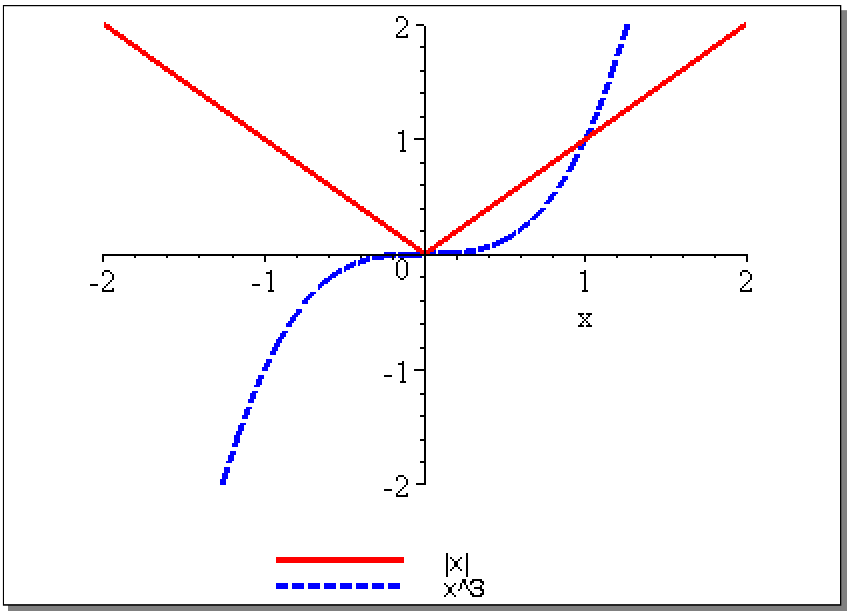


Abbildung 4-2: Beispiel einer geraden Funktion (y = |x|) und einer ungeraden Funktion (y = x^3).

3.) $y = x^3 - x^2$ ist weder gerade noch ungerade (s. Abb. 4.1). Zwar ist wegen $D = D_{max} = \mathbf{R}$ für alle $x \in D$ auch $(-x) \in D$ (Bedingung S), aber wegen $f(x) - f(-x) \neq 0$ und $f(x) + f(-x) \neq 0$ ist weder (G) noch (U) erfüllt. Beweis als Übung!

Def D 4-3 Monotonie einer Funktion

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$, $f : D \rightarrow Z$, und $x_1, x_2 \in D$ seien beliebig. Dann heißt die Funktion f

<u>monoton steigend,</u>	falls	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
<u>streng monoton steigend</u>,	falls	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
<u>monoton fallend</u>,	falls	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
<u>streng monoton fallend</u>,	falls	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Bemerkung: Die Monotoniebedingungen sind schwächer als die der strengen Monotonie, d.h.

(streng monoton steigend) $\Rightarrow$ (monoton steigend) und

(streng monoton fallend) $\Rightarrow$ (monoton fallend)

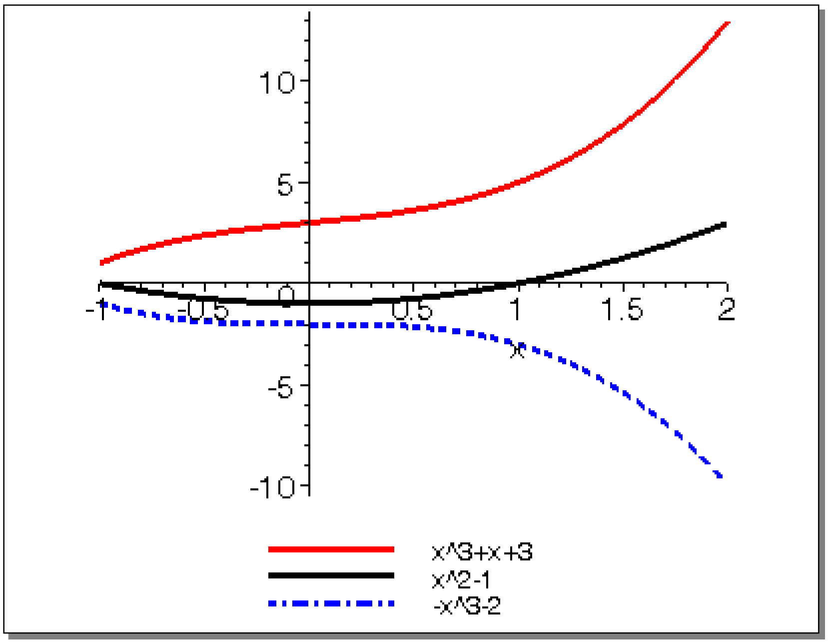


Abbildung 4-3: Beispiele für die Monotonie von Funktionen

$y = x^3 + x + 3$ ist streng monoton steigend,

$y = -x^3 - 2$ streng monoton fallend und

$y = x^2 - 1$ für $x<0$ streng monoton fallend und für $x>0$ streng monoton steigend.

Def D 4-4 Periodizität einer Funktion

Eine Funktion $f: D \to Z,\ y = f(x)$ heißt periodisch mit der Periode p, falls für alle $x \in D$

(P) $f(x) = f(x + p)$.

Mit p ist auch $(\pm k \cdot p)$ mit $k \in \mathbf{N}$ eine Periode für f. Die kleinste Periode $p>0$ einer Funktion heißt primitive Periode von f.

Typische Beispiele periodischer Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen **Sinus, Cosinus** etc. (siehe Abschnitt 4.2.2).

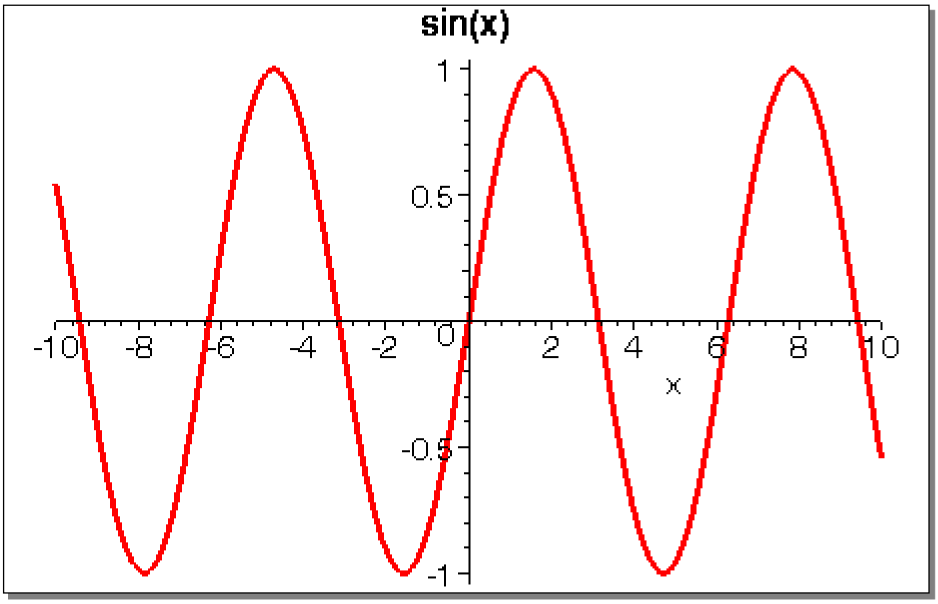


Abbildung 4-4: Periodische Funktion Sinus mit (primitiver) Periode 2π

Zu **Injektivität, Surjektivität, Bijektivität** siehe Vorlesungsskript, Kap. 1.4 und Vorlesungsskript, Kap. 4.2

Beispiel / Übung: Prüfen Sie auf Injektivität und Surjektivität

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = 2x+1$

b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\geq 0}, \ g(x) = x^2$

Lösung:

a) f ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ gilt

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1+1) - (2x_2+1) = 2\,(x_1-x_2).$$

Für $x_1 \neq x_2 \in \mathbf{R}$ gilt somit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

f ist auch surjektiv, denn für jedes y∈**R** gibt es ein x∈**R**, nämlich $x = \frac{y-1}{2}$, wie man durch Auflösen von y=f(x) nach x findet.

b) y=g(x) ist surjektiv, denn für jedes $y \geq 0$ gibt es ein x, nämlich $x = \sqrt{y}$,
g ist NICHT injektiv, denn zum Beispiel ist g(2) = 4 = g(-2).

Meist kann man Funktionen, die NICHT "X"-jektiv sind ("X" = in-, sur- oder bi-) durch passende Einschränkung des Definitionsbereichs und/oder des Wertebereiches "X"-jektiv machen.

V4.2. Funktionsübersicht

4.2.1. Polynome (=ganz-rationale Funktionen) und gebrochen-rationale Funktionen

<table>
<tr><td colspan="3">Rationale Funktionen
$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ mit $a_i, b_i \in$ R und $m,n \in$ N0</td></tr>
<tr><td>Polynome
(=ganz-rationale Funktionen)</td><td colspan="2">gebrochen-rationale Funktionen
n>0</td></tr>
<tr><td></td><td>echt-rational</td><td></td></tr>
<tr><td>Nenner = 1 (d.h. n=0)</td><td>n>m</td><td>n≤m</td></tr>
<tr><td>Bsp.: $5+\frac{3}{5}x+x^2\ln 5$</td><td>$\frac{x}{x^2+\sqrt{2}}$</td><td>$\frac{x^2+5}{x^2-x+\pi}$</td></tr>
<tr><td>Definitionsbereich = R,
stetig auf ganz R,
keine Polstellen</td><td><u>kann</u> Polstellen haben,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$</td><td><u>kann</u> Polstellen haben</td></tr>
</table>

a) x_0 heißt **k-fache Nullstelle** von f(x), falls sich der Faktor $(x-x_0)$ k-mal aus $p_m(x)$ abspalten läßt (und ein Polynom übrig bleibt).

b) x_0 heißt **k-fache Polstelle** von f(x), falls x_0 k-fache Nullstelle von $q_n(x)$ ist.

<u>Beispiele:</u>

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Die Funktion f hat eine einfache Nullstelle bei x = 1 und einen einfachen Pol bei x = - 2.

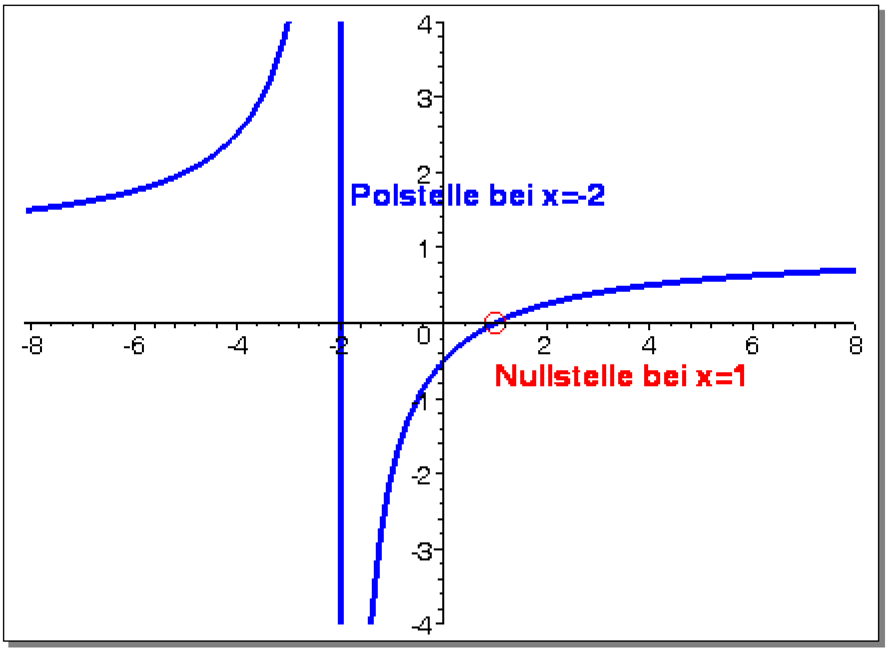


Abbildung 4-5: Die Funktion $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

b)

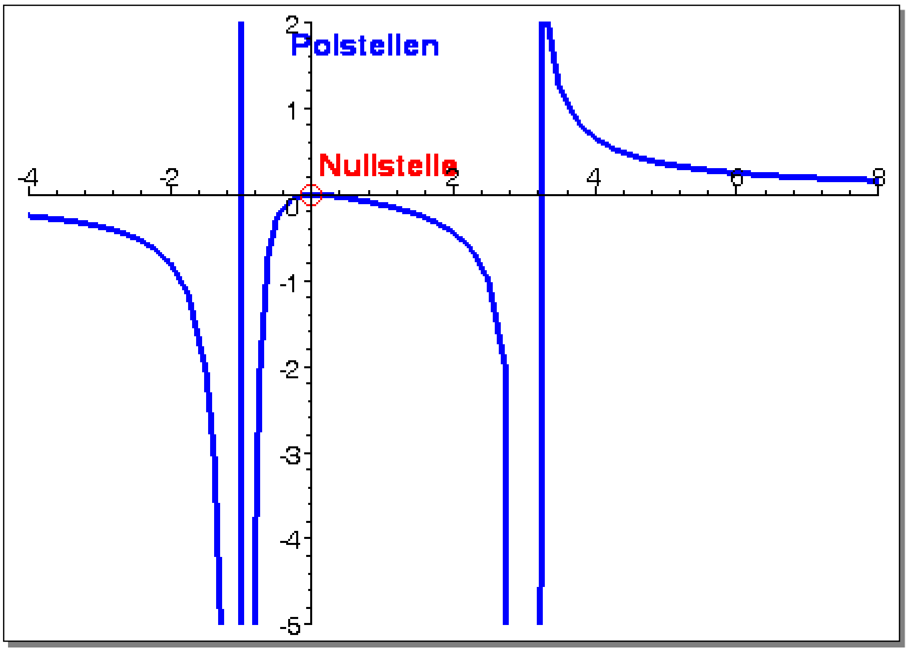


Abbildung 4-6: Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2(x-3)}$

Die Funktion f hat eine doppelte Nullstelle bei x = 0, einen zweifachen Pol bei x = - 1 und einen einfachen Pol bei x = 3 .

4.2.2. Trigonometrische Funktionen

Wozu braucht man Trigonometrie?

Anwendungsfelder trigonometrischer Funktionen sind außer in der Geometrie überall dort, wo Schwingungen oder periodische Abläufe zu beschreiben sind, z.B:

- Wellen, Pendelbewegung
- Wechselstromkreise etc.

Bogenmaß

In der ebenen Geometrie werden üblicherweise Winkel in Gradmaß gemessen (0^0 bis 360^0). Die Einteilung in 360 Grad ist willkürlich (andere Einteilungen, z.B. in 400, gibt es auch). Mathematiker haben sich auf den Einheitskreis, der den "Universalumfang" 2π hat, und das Bogenmaß geeinigt:

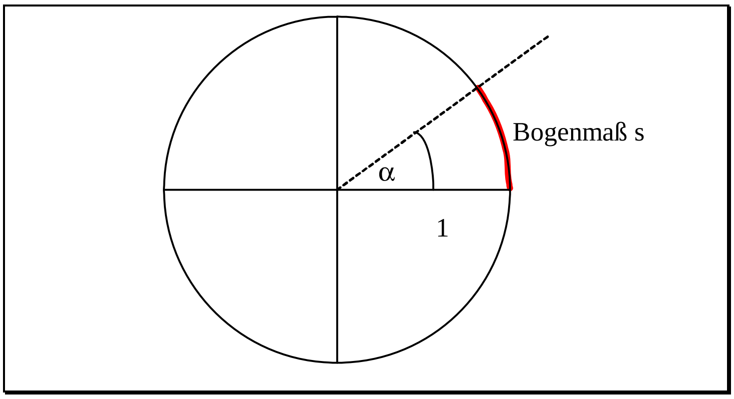


Abbildung 4-7: Bogenmaß versus Gradmaß

Zwischen Bogenmaß s und Gradmaß α besteht die lineare Beziehung:

$s = \frac{\pi}{180^0}\alpha$ bzw. $\alpha = \frac{180^0}{\pi} s$

mit π = 3.1415.......

Tabelle spezieller Winkel:

α	-90^0	0^0	30^0	45^0	90^0	180^0	270^0	360^0	720^0
s	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	4π

Drehsinn: positiv: Gegenuhrzeigersinn
negativ: Uhrzeigersinn

Def D 4-5 Sinus- und Cosinus-Funktion

Der Sinus eines beliebigen Winkels $\alpha \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als der y-Abschnitt des zu α gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.

Der Cosinus eines beliebigen Winkels $x \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als der x-Abschnitt des zu x gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.

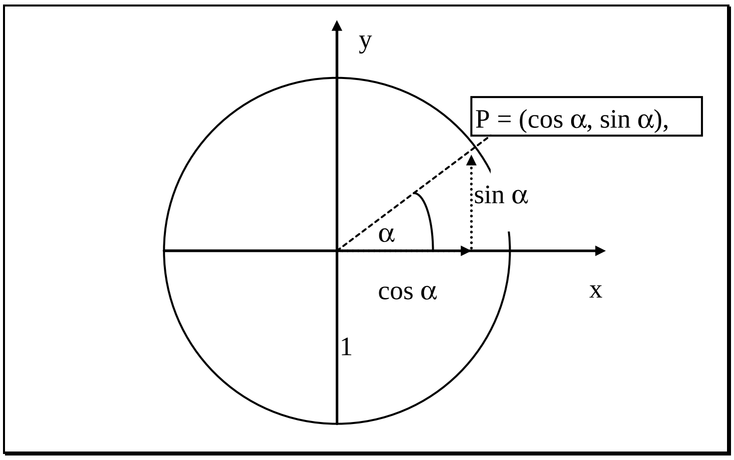
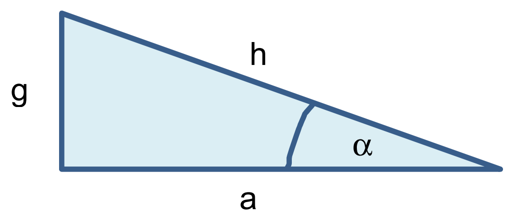


Abbildung 4-8: Darstellung von Sinus und Cosinus im Einheitskreis

Satz S 4-1 „Dreiecksbeziehungen“

Im **rechtwinkligen** Dreieck gelten folgende Beziehungen:



$\sin(\alpha) = \frac{g}{h}$	$\cos(\alpha) = \frac{a}{h}$	$\tan(\alpha) = \frac{g}{a}$

Bemerkung: Die längste Seite heißt **Hypothenuse** h, die dem Winkel α gegenüberliegende Seite heißt **Gegenkathete** g, die am Winkel α beginnende Seite heißt **Ankathete** a.

Satz S 4-2 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Im Folgenden sei $k \in \mathbf{Z}$ eine ganze Zahl.

Symmetrie:	Periodizität:	Nullstellen:
$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$	bei $x=k\pi$ für Sinus bei $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ für Cosinus

Beschränktheit: $\lvert\sin(x)\rvert \leq 1$ $\lvert\cos(x)\rvert \leq 1$	Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	

Bemerkung: wir schreiben als Kurzform von $(\sin(x))^2 = \sin^2 x$.

Satz S 4-3 Additionstheoreme

$$\sin(x_1+x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$
$$\cos(x_1+x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

Aus den Additionstheoremen lassen sich nützliche Rechenregeln ableiten, z.B.

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \qquad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos(x) \qquad \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(x)$$

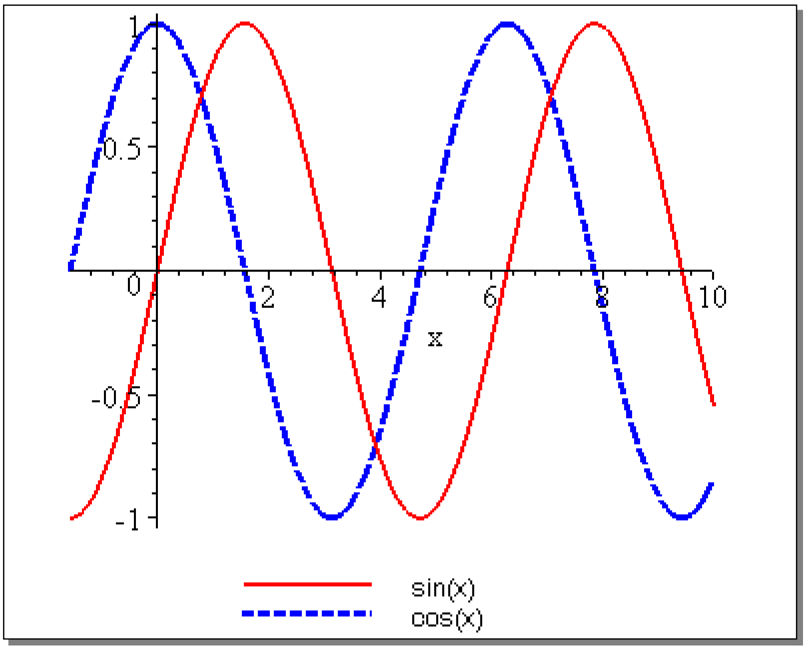


Abbildung 4-9: Graphen der Sinus- und der Cosinus-Funktion

Ü

Beispielaufgabe: "Blutroter Sonnenuntergang am Äquator"

Blutrot versinkt die Sonne am Äquator im Meer. Wir sitzen im leise schaukelnden Boot und blicken zurück auf die Küste im Osten, an der sich steil ein mächtiger Berg erhebt. Genau um 18:08 erreicht der Schatten der Dämmerung den Saum der Küste und genau 7 Minuten später, um 18:15, verlöscht der letzte Sonnenstrahl an der Spitze des Berges. Wie hoch ist der Berg? (Erdradius = 6000 km)

Wie ändert sich die Lage, wenn wir uns auf dem 50. Breitengrad befinden?

[Lösung am Ende]

4.2.3. Tangens- und Cotangensfunktion

Wichtig ist eigentlich nur

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und Cotangens = Kehrwert des Tangens. Der Rest ergibt sich aus den Eigenschaften von Sinus und Cosinus.

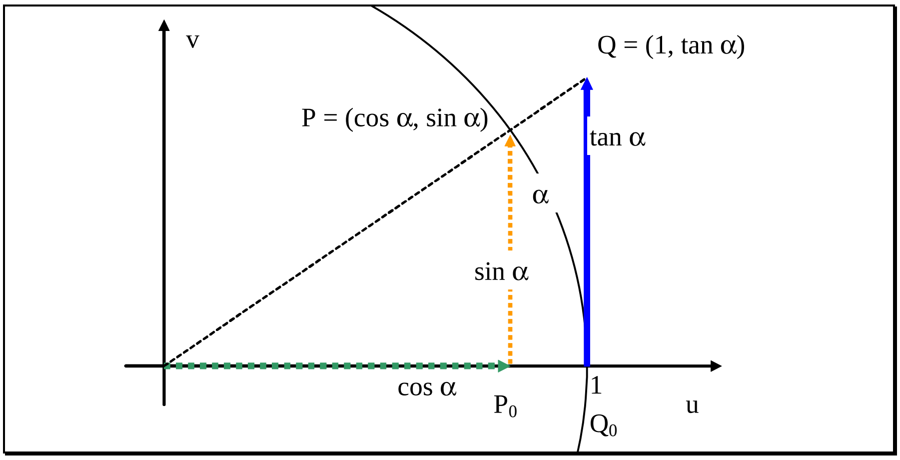


Abbildung 4-10: Darstellung von Tangens mit Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Der Tangens wird, wie auch Sinus und Cosinus, am Einheitskreis definiert. Er ist hier die Länge der Gegenkathete, wenn die Ankathete die Länge 1 hat. Aus der geometrischen Ähnlichkeit der Dreiecke OP_0P und OQ_0Q folgt $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1}$. An der Skizze können wir weiterhin abschätzen, dass für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt: $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.

Def D 4-6 Tangens- und Cotangens-Funktion

Der <u>Tangens</u> eines beliebigen Winkels $x \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\tan : R \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi;\quad k \in Z\} \longrightarrow R$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Der <u>Cotangens</u> eines beliebigen Winkels $x \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\cot : R \setminus \{k\pi;\ \ k \in Z\} \longrightarrow R$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Tangens im rechtwinkligen Dreieck s. **Satz S 4-1**.

Satz S 4-4 Eigenschaften von Tangens und Cotangens Im Folgenden sei $k \in \mathbf{Z}$ eine ganze Zahl.	
Symmetrie: $\tan(-x) = -\tan(x)$ $\cot(-x) = -\cot(x)$	Nullstellen: bei $x = k\pi$ für Tangens bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ f. Cotangens
Periodizität: $\tan(x+2k\pi) = \tan(x)$ $\cot(x+2k\pi) = \cot(x)$	Polstellen: $\tan x \to \pm\infty$ bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\cot x \to \pm\infty$ bei $x = k\pi$

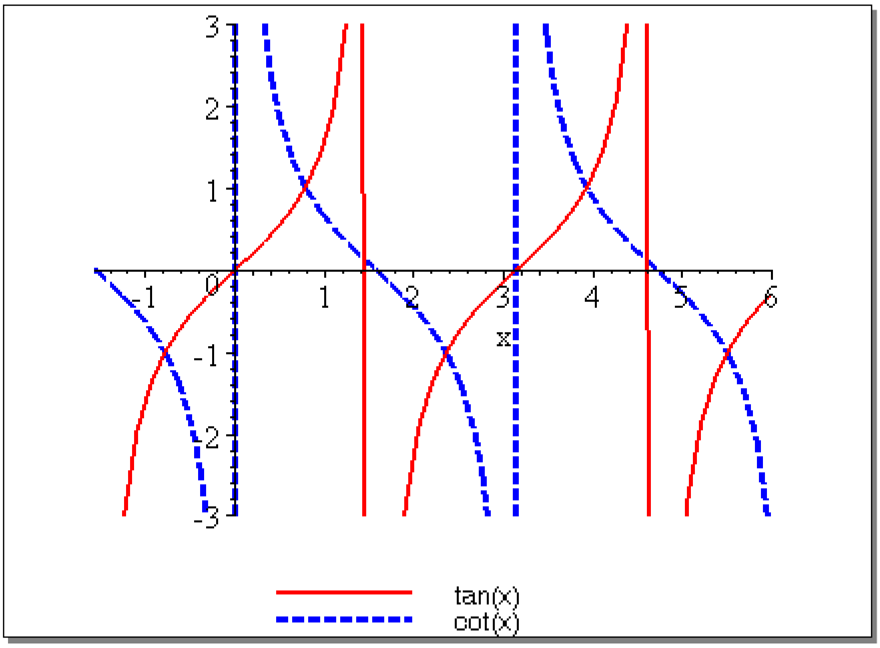


Abbildung 4-11: Tangens- und Cotangensfunktion

4.2.4. Arcusfunktionen

Monotonie

Sinus und Cosinus sind als Funktionen auf **R** definiert, aber dort nicht monoton, also auch nicht umkehrbar. Schränkt man allerdings Sinus auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein und Cosinus auf $(0,\pi)$, so sind beide Funktionen streng monoton und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktionen werden als Arcussinus und Arcuscosinus bezeichnet.

Tangens und Cotangens sind auf ihren maximalen Definitionsbereichen nicht monoton. Allerdings ist Tangens auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und Cotangens auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend. Auf diesen Intervallen sind die Funktionen auch umkehrbar Die Umkehrfunktionen werden als Arcustangens und Arcuscotangens bezeichnet

Def D 4-7 Arcusfunktionen

Die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens werden Arcusfunktionen genannt.

Winkelfunktionen	Arcusfunktion
sin: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, x=sin y	arcsin: $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y=arcsin x = $\sin^{-1}$ x
cos: $[0,\pi] \to [-1,1]$, x=cos y	arccos: $[-1,1] \to [0,\pi]$, y=arccos x = $\cos^{-1}$ x
tan: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to$ **R**, x=tan y	arctan: **R** $\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y=arctan x = $\tan^{-1}$ x
cot: $[0,\pi] \to$ **R** , x=cot y	arccot: **R** $\to [0,\pi]$, y=arccot x = $\cot^{-1}$ x

Hinweis: Schreibweise $\tan^{-1}$ x nicht verwechseln mit 1/tan x. Deshalb besser arctan x oder atan x verwenden!!

Im Definitionsbereich gilt arcsin(sin y) = y und sin(arcsin x) = x und entsprechend auch für die übrigen Umkehrfunktionen.

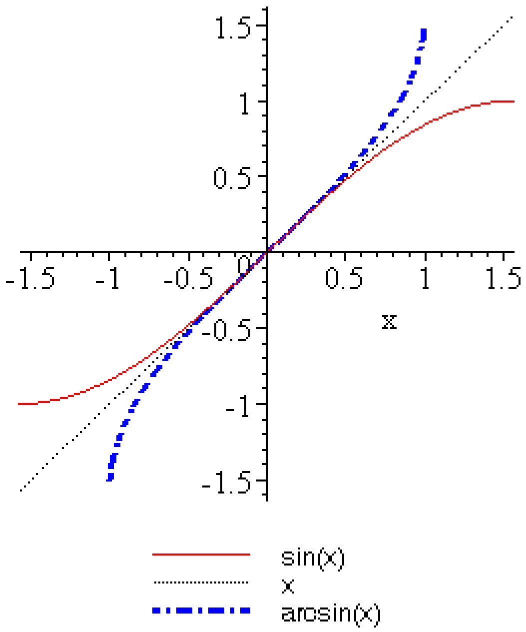


Abb. 4.12: Sinus und Arcussinus

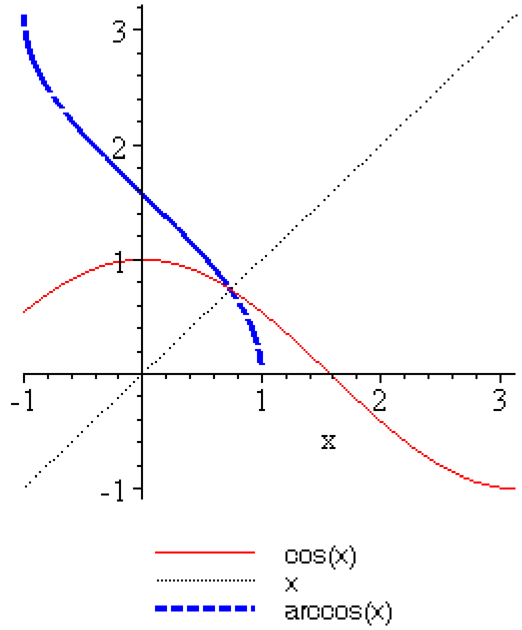


Abb. 4.13: Cosinus und Arcuscosinus

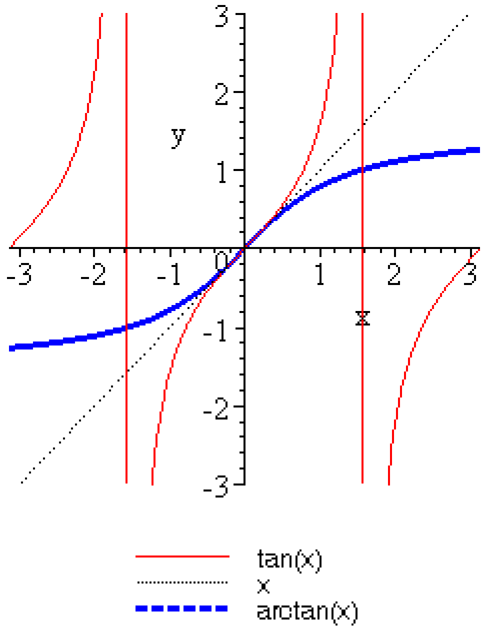


Abb. 4.14: Tangens und Arcustangens

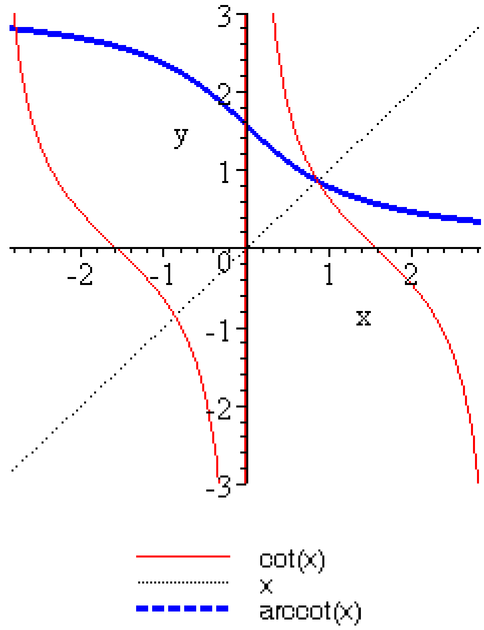


Abb. 4.15: Cotangens und Arcuscotangens

Weitere Eigenschaften der Arcusfunktionen werden in den Übungen besprochen!

Ü

Übung: Bei einem Haus mit 20m Breite hat der Dachstuhl eine Giebelhöhe von 5m. Welchen Winkel schließt das Dach mit der Horizontalen ein?

4.2.5. Hyperbolische Funktionen

Sinus hyperbolicus (sinh) und Cosinus hyperbolicus (cosh) sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

Sie erfüllen die Additionstheoreme

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh(x_1)\cosh(x_2) \pm \cosh(x_1)\sinh(x_2)$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh(x_1)\cosh(x_2) \pm \sinh(x_1)\sinh(x_2)$$

(Beweis in Übungen)

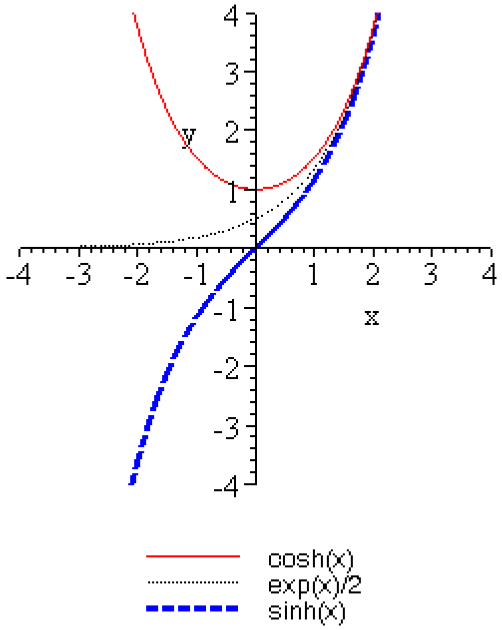


Abbildung 4-16: Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

Wieso in den Namen dieser Funktionen "Sinus" und "Cosinus" vorkommt, obwohl die Funktionen ja gar nicht periodisch sind, werden wir später verstehen, wenn wir zu komplexen Zahlen und komplexen Funktionen kommen.

Lösung zu Aufgabe "Blutroter Sonnenuntergang am Äquator":
Aus geeigneter Zeichnung liest man ab:

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h} \quad \Leftrightarrow \quad h = R\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

Es gilt 1 Tag = 24·60 min =1440 min. α(1 Tag) =2π $\Rightarrow$ (via Dreisatz) α(7 min) = 2π*7/1440.

Durch Einsetzen folgt h=2799.76 m für Äquator. Für den 50. Breitengrad (b=50^0) ist R zu ersetzen durch R_{eff}=R sin b (Abstand zur Erdachse, Bild!) und damit ist h=2144.74 m.

Hinweis auf später: wir werden mit dem Satz von Taylor in Kapitel 05-Differentialrechnung eine noch viel einfachere Faustformel "Höhe[m] = 57 * Zeit[min] zum Quadrat" kennenlernen.

Lösung zur Aufgabe Hausdach: [Skizze machen] α = arc tan (5/10) * 180/π = 26.56°.