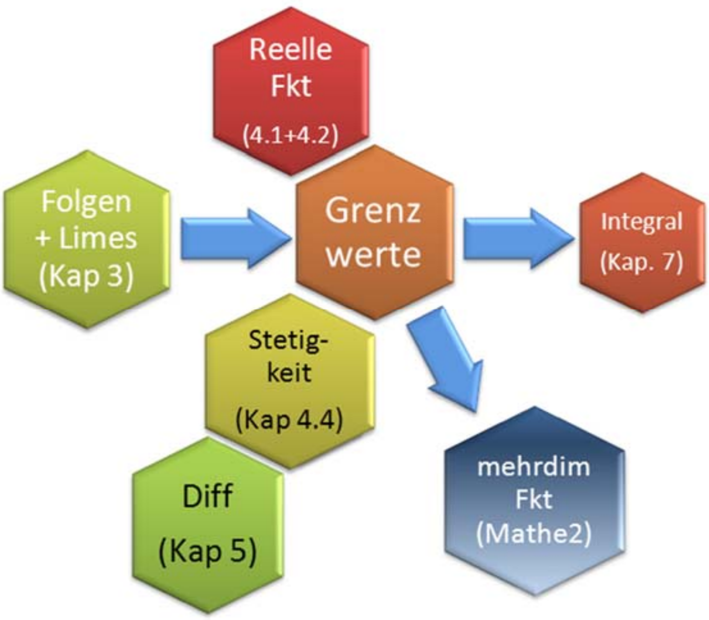
3. Zahlenfolgen

3.1. Wozu InformatikerInnen Folgen brauchen

- Konvergenz von Folgen ist die Grundlage der Analysis (Differential- und Integralrechnung)
- Transzendente Gleichungen wie $x \ln x = 50$ kann man näherungsweise über Folgen lösen (**Fixpunkt-Iteration**)
- Jede **Simulation** im Computer zerlegt die Zeit in kleine Schritte und berechnet somit Folgen $f(t_0)$, $f(t_1)$, $f(t_2)$, ... >> WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme.
- **Laufzeit von Algorithmen**, Worst-case-Abschätzung durch obere Abschätzung zu bekannten Folgen. Oftmals schreibt man ein Programm und kann es für kleine Mengen (z.B. n=10) austesten, aber in der Praxis wird es mit viel größeren Mengen (z.B. n=1.000.000) laufen. Wie ist das Verhalten im Grenzwert großer Zahlen? Dies führt auf Folgen und die **Landausche O()-Notation**.

Einordnung:



3.2. Definition und Eigenschaften von Folgen

Wir hatten ja bereits zur Definition reeller Zahlen den Begriff der Zahlenfolge benötigt. In diesem Kapitel soll der Begriff weiter vertieft werden.

Def D3-1: Zahlenfolge
Unter einer (unendlichen) Zahlenfolge versteht man eine eindeutige Abbildung der Menge **N** der natürlichen Zahlen auf einen Zahlenbereich. $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = a_1, a_2, a_3, \ldots$

Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$ heißen Glieder der Folge, a_n ist das n-te Glied.

Beispiel:

$$1.)\ a_n = \tfrac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\ (a_n) = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots \quad (\text{Bem.}: a_n \to 0)$$

Weitere Beispiele in Vorlesung

Def D3-2: Monotonie von Folgen

Eine Folge heißt:

monoton wachsend (↑), falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \le a_{n+1}$

streng monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n < a_{n+1}$

monoton fallend (↓), falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \ge a_{n+1}$

streng monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n > a_{n+1}$

Def D3-3: Beschränktheit von Folgen

Sei $n \in \mathbf{N}$. Eine Folge heißt:

nach oben beschränkt (n.o.b.), falls ein
$K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle n gilt: $a_n \le K$

nach unten beschränkt (n.u.b.), falls ein
$L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle n gilt: $a_n \ge L$
und
beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiele:

$$1.)\ a_n = \frac{n}{2^n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\ (a_n) = \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{4}{16}, \dots$$

Die Folge ist monoton fallend und beschränkt, z.B. L = 0, K = 1.

$$2.)\ a_n = n, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\ (a_n) = 1, 2, 3, 4, \dots$$

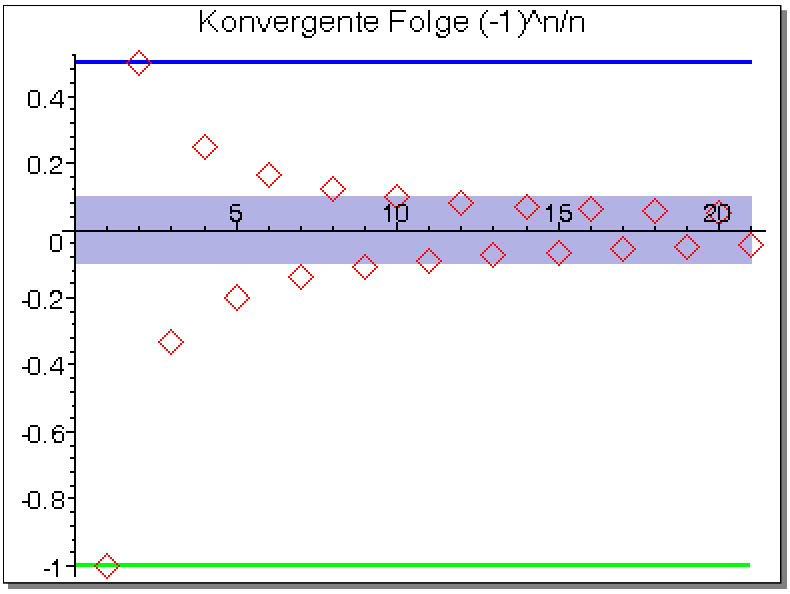
Die Folge ist streng monoton wachsend und nach unten beschränkt, z.B. L = 0, aber nach oben **unbeschränkt** (es existiert kein K mit $a_n \leq K \; \forall n$).

3.3. Grenzwert einer Zahlenfolge

Schauen wir uns ein Beispiel

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

im Graphen an:



Anschaulich: Ab einem gewissen n liegen alle Folgeglieder im "ε-Band" um Grenzwert g=0, egal wie schmal das Band ist.

BEACHTE: Grenzwert und (obere/untere) Schranke sind nicht dasselbe!! Die Folge hat die untere Schranke (z.B.) -1, die obere Schranke +1/2 und den Grenzwert 0.

Dieses anschauliche Bild "ε-Band" wird nun in eine Definition übersetzt.

Def D3-4: Grenzwert einer Folge

g heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_o(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \geq n_o(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Existiert der Grenzwert einer Folge, dann heißt die Folge **konvergent**. Man schreibt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g \qquad \text{oder} \qquad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} g$$

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt **divergent**.

Es gilt:

Satz S3-1 Eine konvergente Folge ist beschränkt.

nur muss eben der Grenzwert nicht mit oberer/unterer Schranke zusammenfallen.

Die logische Umkehrung des Satzes ist manchmal auch nützlich:

Satz S3-2 Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

Eine unbeschränkte Folge, bei der für jedes K ab einem bestimmten $n_0(K)$ alle Folgenglieder über K liegen, heißt **bestimmt-divergent**, sie besitzt den **uneigentlichen Grenzwert** $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Genauso für **uneigentlichen Grenzwert** $-\infty$.

Beispiel für Grenzwerte:

$$1.)\ a_n = \tfrac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\ (a_n) = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0 \qquad \text{"Nullfolge"}$$

Beweis in Vorlesung

$$2.)\ a_n = 1-(-1)^n, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\ (a_n) = 2,0,2,0,2,..$$

$\Rightarrow$ (a_n) ist divergent

BEACHTE: Nicht jede divergente Folge ist auch unbeschränkt (!!)

$$3.)\ a_n = n^2+5, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h.}\ (a_n) = 6,9,14,..$$

(a_n) ist nach **Satz S3-2** divergent, weil (a_n) nicht beschränkt ist.
(a_n) ist **bestimmt-divergent** und besitzt den **uneigentlichen Grenzwert** ∞ .

3.3.1. Rechnen mit Grenzwerten

Wir wollen für beliebige Folgen ohne viel Aufwand den Grenzwert berechnen. Der Weg:

1. Für einige wenige fundamentale Folgen den Grenzwert kennen
2. Andere Folgen durch Rechnen mit Grenzwerten auf Fundamentalfolgen zurückführen

Satz S 3-3 **Fundamentale Nullfolgen**		
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$ für $\lvert q\rvert > 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$

Satz S 3-4 **Fundamentale bestimmt-divergente Folgen (+∞)**		
$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ für $q > 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \infty$ für $\alpha > 0$

Satz S 3-5 **Rechengesetze für Grenzwerte**

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b. Dann sind auch die

Folgen $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n), \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $\text{für}(b_n \neq 0, b \neq 0)$ und $(a_n)^r$ für $r \in \mathbf{R}$

konvergent, und es gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = ca$	d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^r = a^r$

Rechentechnisch: Man kann den Limes auf die Einzelterme "nach innen ziehen", z.B.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}\right) \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n)^r = \left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)^r$$

wenn der entstehende Term „entscheidbar“ ist.

Die Regeln von **Satz S 3-5** sind auch nutzbar, wenn Folgen a_n oder b_n gegen $\pm\infty$ "konvergieren", wenn einer der nachfolgenden **entscheidbaren** Fälle vorliegt:

Satz S 3-6 **Sei $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^+$, also $d > 0$**			
$c + \infty = \infty$ $\infty \cdot d = \infty$	$\infty + \infty = \infty$ $\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{c}{\infty} = 0$ $\frac{c}{0^+} = \infty, \frac{c}{0^-} = -\infty$	$(\infty)^d = \infty$

$c + \infty = \infty$ ist so zu verstehen: Eine Folge, die gegen c konvergiert, plus eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht, ergeben zusammen eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht.

0^+ ist so zu verstehen: Eine Folge, die mit lauter positiven Werten gegen 0 konvergiert. Analog bezeichnet 0^- eine Folge, die mit lauter negativen Werten gegen 0 konvertiert

Dagegen sind nachfolgende Ausdrücke "**unentscheidbar**", d.h. ohne weitere Untersuchung kann NICHTS ausgesagt werden:

$0 \cdot \infty = ?$	$\infty - \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$

Dann muss man durch geeignete Umformungen versuchen, zu einer entscheidbaren Situation zu kommen.

In Vorlesung werden Folgerungen aus **Satz S 3-5** und **Satz S 3-6** gezeigt.

Regeln für die Berechnung von Grenzwerten:

- Komplizierte Ausdrücke auf Summe / Produkt / Quotient bekannter Folgen (meist Nullfolgen und konstante Folgen) zurückführen.
(D.h. wenn möglich, den Limes "nach innen ziehen".)
- Bei Brüchen durch die größte Potenz **im Nenner** dividieren (**g.P.i.N.**).
- Wenn beim Nach-Innen-Ziehen eine unentscheidbare Situation (z.B. $\infty - \infty$) entsteht, dann schauen, ob eine Zusammenfassung (z.B. auf gemeinsamen Hauptnenner) Klärung bringt.

Beispiele:

1a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \mathbf{0}$

1b)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3}{5n^3}$. Wäre $\frac{\infty}{\infty}$, wenn wir Grenzwert einfach so nach innen ziehen, also unentscheidbar. Natürlich mit „g.P.i.N.“ oder Kürzen einfach lösbar. Resultat: $\frac{3}{5}$

1c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2+4n-5}{8n^2-3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{8-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-2)+\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{n})-\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(8)-\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{n})+\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{7}{n^2})} = \frac{-2+0-0}{8-0+0} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Hier haben wir zuerst „g.P.i.N.“ benutzt, damit konstante Folgen oder Nullfolgen entstehen und wir so den Limes nach innen ziehen dürfen.

1d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

1e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

Zur Übung: 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2-1}{3n^2+2}\right)^2$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n-1}\right)$

4) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{75\cdot 10^k+6\cdot 10^{2k}}{0.4\cdot 10^{k-3}-20\cdot 10^{2k-2}}$

3.4. Anwendungen für Zahlenfolgen

3.4.1. Fixpunkt-Iteration

Die **Fixpunkt-Iteration** ist eine "quick-&-dirty"-Methode, um von nicht einfach lösbaren Gleichungen (sog. *transzendenten* Gleichungen) eine Lösung zu bestimmen:

1. Man bringt die Gleichung in die sog. **Fixpunkt-Form** $a = f(a)$.
(Hierfür gibt es oft zahlreiche Möglichkeiten, und man muss probieren, welche Lösung zum Ziel führt)
2. Jetzt startet man mit einem Wert a_1 und bestimmt $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, ... usw., also allgemein: $a_n = f(a_{n-1})$
3. Wenn die Folge (a_n) den Grenzwert a besitzt, dann ist a *eine* Lösung der transzendenten Gleichung.

Beispiel: Wir suchen eine numerische Lösung x für die Gleichung $x^2 = 2$.

Lösung: Sei $x \neq 0$. Wir addieren x^2 auf beiden Seiten und dividieren mit x durch:

$$2x^2 = x^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x + \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = f(x)$$

Ersetzen wir das x auf der linken Seite durch a_n und die x auf der rechten Seite durch a_{n-1}, so erhalten wir eine sog. **rekursive Folge**:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$$
$$\dots$$
$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) = f(a_{n-1})$$

Wir können nun mit dem Taschenrechner (oder Excel) Werte einsetzen und erhalten:

(in Excel vormachen)

$a_1=1$, $a_2=1.5$, …, $a_6=1.41421356$

Wieso quick & dirty?

- Es gibt für jede Gleichung unendlich viele Fixpunkt-Formen. Man hat also keine Garantie, alle Lösungen gefunden zu haben
- Nicht jede Fixpunkt-Form muss einen Grenzwert haben.

Aber immerhin kann man überhaupt eine Lösung für schwierige Gleichungen finden!

3.4.2. Landausche O()-Notation

[Teschl, Bd. 1, S. 204-210] oder [Hachenberger05, S. 383-387][2]

In der Informatik muss man oft die Laufzeit von Algorithmen abschätzen. Beispiel Matrixmultiplikation: Man braucht n^3 Multiplikationen und $n^2(n-1)$ Additionen, also insgesamt

$$a_n = 2n^3 - n^2$$

Operationen. Wie wächst die Laufzeit, wenn die Matrixgröße n (Zeilenzahl) steigt? Oft interessiert man sich für das Grenzwertverhalten großer n, und hier ist n^3 der dominante Term :

Def D3-5: Landausche O()-Notation

Seien $A=(a_n)$ und $B=(b_n)$, $b_n \neq 0$ Folgen. Wir definieren die Menge **"Groß-O" von B** durch

$$O(B) = O(b_n) = \{ (a_n) \mid \text{Der Quotient } \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \text{ ist beschränkt} \}.$$

Man sagt dann: Die Folge A ist **"von der Ordnung O(B)"**, als Formel: $A \in O(B)$.

Für $A \in O(B)$ schreibt man üblicherweise (wenn auch ungenau) $A = O(B)$.

Beispiele:

1. $2n^3 - n^2 \in O(n^3)$, denn $\left|\frac{2n^3 - n^2}{n^3}\right| = \left|2 - \frac{1}{n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$
2. $n+2 \in O(n)$, aber auch $n+2 \in O(n^2)$ oder $n+2 \in O(4n)$
3. $(-1)^n \in O(1)$, denn $\left|\frac{(-1)^n}{1}\right| = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
4. $6n\log n + 270n + 4 \in O(n\log n)$

ANMERKUNG: Die Folge $B=(b_n)$ wird dabei **meist** so gewählt, dass sie

1. möglichst einfach ist (also $b_n = n^3$ statt $2n^3 - n^2$ im Matrixbeispiel)
2. möglichst "billig" ist, im Sinne von Laufzeit-"Kosten" (also $b_n = n^3$ statt n^4 oder 2^n)

WARNUNG: Das Gleichheitszeichen in Aussagen mit der O()-Notation ist NICHT das Gleichheitszeichen der Arithmetik, sondern nur eine (ungenaue) Abkürzung für "$\in O(B)$". Denn aus A=O(B) und C=O(B) folgt NICHT A=B und NICHT A=C. Mit der O()-Notation drückt man aus, dass das die Folgen A, B und C **für große n** zur selben Wachstumsklasse (Menge) gehören.

[2] [Hartmann04, S. 245-249] bringt die O()-Notation auch, allerdings Schreibweise etwas unpräzise.

Es gilt folgende Reihung für Wachstumsklassen:

Satz S 3-7	**Landau-O()-Reihenfolge**
$O(1) < O(\log(n)) < O(n) < O(n \log(n)) < O(n^2) < O(n^2 \log(n)) < \ldots < O(2^n)$	

Hierbei bedeutet z.B. $O(\log(n)) < O(n)$:

Für jeden Vertreter $a_n \in O(n)$ mit $a_n \notin O(\log(n))$ gilt: $\left|\frac{a_n}{\log(n)}\right|$ ist divergent.

Mit anderen Worten: $a_n \in O(n)$ wächst stärker als $c \cdot \log(n)\ \forall c \in \mathbb{R}$.

Übung: Ordnen Sie den Folgen ein möglichst einfaches und "billiges" O(B) zu.

	Folge	
(1)	$2n^3 - n^2$	***$O(n^3)$***
(2)	$7n^5 + 26n^6$	
(3)	$n + 3n^2 - 2n\log(n)$	
(4)	$\frac{n^4 + n^2}{n+5}$	
(5)	$\frac{n^4 + n^2}{n+5} - n^3$	

Übung: $A_n, B_n, \ldots$ seien die Laufzeiten verschiedener Algorithmen. Entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3: Welcher Algorithmus, erster oder zweiter, ist jeweils für große n schneller?

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$C_n = \frac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50}$	$D_n = \frac{(n+1)!\,n}{(n-1)!\,(n+1)^2}$
Fall 3	$E_n = 10n + 10^{-3}n^4$	$F_n = 10n + 2000n^2$

Hinweis: Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter“

3.5. Fazit zu Folgen

Wir haben in diesem Kapitel folgende Begriffe kennengelernt:

- Grenzwert: wenn schließlich alle Folgenglieder in einem "ε-Schlauch" liegen
- konvergente Folge: hat ein endliche Zahl als Grenzwert (Limes)
- divergente Folge: das Gegenteil
- bestimmt-divergente Folge: hat $+\infty$ oder $-\infty$ als Grenzwert (uneigentlicher G.)

Wichtige Resultate:

- Mit Grenzwerten kann man rechnen: Operator $\lim\limits_{n\to\infty}$ vertauschbar mit den meisten Grundrechenoperationen.
- Techniken: g.P.i.N., Hauptnenner, …

Was man sich merken sollte:

- die fundamentalen Nullfolgen aus Satz S 3-3 und
- die fundamentalen bestimmt-divergenten Folgen aus Satz S 3-4.
- die Landau-O-Reihenfolgen aus Satz S 3-7.