# 5. Differentialrechnung

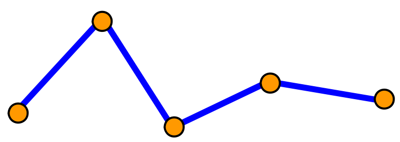
## 5.1. Wozu Informatikerinnen Differentialrechnung brauchen

- In vielen technischen Problemen interessiert man sich für die momentane Steigung (= Änderungsgeschwindigkeit) von Funktionen (Bsp. Weg → Geschwindigkeit → Beschleunigung). Der Differentialquotient liefert die genaue Berechnung.
- In der **Computergraphik** möchte man oft durch vorgegebene Punkte eine möglichst "glatte" Kurve zeichnen. Die Differentialrechnung gibt uns die mathematischen Mittel, um genau zu beschreiben, was "glatt" heißt.
- Bei der **Optimierung** reeller Funktionen sucht man Stellen mit Steigung 0 (lokale Extrema, f'(x)=0) → **Extremwertaufgaben**.
- Um sin(x), $e^x$, ln(x) numerisch auf dem Rechner zu bestimmen, braucht man den **Satz von Taylor**. Um funktionale Zusammenhänge zu vereinfachen ebenfalls.
- Die Differentialrechnung ist die Grundlage für **Differentialgleichungen (DGLs)** → DGLs (s. Mathe 2) braucht man, wenn man dynamische Systeme auf dem Rechner simulieren will (z.B. Ökosysteme, Wirtschaftssysteme oder Flugzeugsimulatoren)

## 5.2. Differenzierbarkeit, Ableitung, Differential

Die Differentialrechnung wurde Ende des 17. Jahrhunderts fast gleichzeitig von Newton und Leibniz entwickelt. Sie bildet zusammen mit der Integralrechnung die Grundlage der rapiden technischen Entwicklung im 19. und 20. Jahrhundert.

**Motivation**: Wir möchten eine Menge von Punkten durch eine möglichst "schöne" Kurve verbinden.



?

**Aktivierung:** Wie erklären wir dem Computer, was "schön" bedeutet?

In Vorlesung wird Begriff der Steigung einer Funktion an der Stelle $x_0$ entwickelt

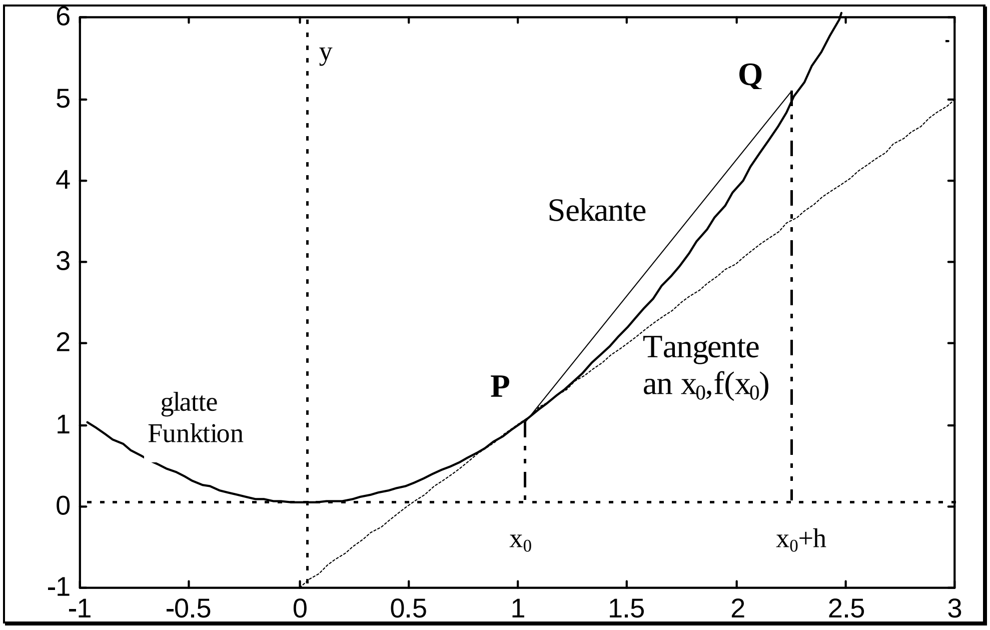
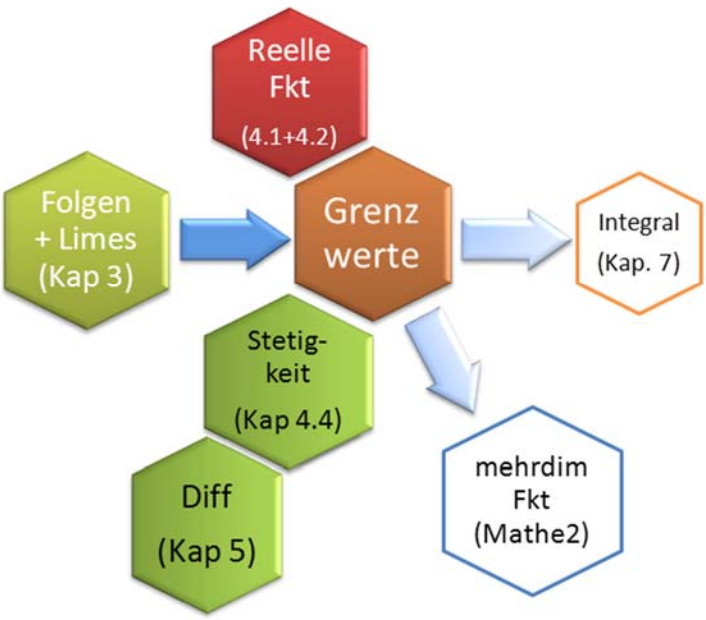



**Abbildung 5-1: Tangente an den Punkt P einer „glatten" Funktion**

Maple-Animation in [function-plots.mws]() zeigen!




**Def D 5-1:** **Differenzierbarkeit einer Funktion und Ableitung**

Sei $f : D \to \mathbf{R}$, mit $x \mapsto f(x)$, $x_0 \in D$.

f heißt **differenzierbar** in $x_0$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt **Ableitung** der Funktion f an der Stelle $x_0$ oder **Differentialquotient** von f an der Stelle $x_0$.

Schreibweise: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_o+h)-f(x_0)}{h}$

Die Funktion $f\,' : D_{f\,'} \to \mathbf{R}$ , mit $x \mapsto f'(x)$ heißt Ableitungsfunktion von $f$ oder kurz **Ableitung von f**.

Bemerkungen:

a) Das Berechnen der Ableitung nennt man Differenzieren.

b) Die Betrachtung des Grenzwertes mit $h\to 0$ ist vollkommen identisch mit der Betrachtung des Grenzwertprozesses $x \to x_0$ ($x = x_0+h$). Der Quotient

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

heißt **Differenzenquotient**. Von ihm rührt eine weitere Schreibweise der Ableitung her:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)}$$

Die Größe $\boxed{df = f'(x_0)\cdot dx}$ heißt **Differential** von f an der Stelle $x_0$ zur Verschiebung dx.

Beispiel 1): Bestimmen Sie die Ableitung von $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, mit $f(x) = x^2$ in $x_0$, indem Sie den Limes aus der Definition ausrechnen!

Können Sie das auch für das allgemeine Polynom $f(x) = x^n$ $(n\in \mathbf{N})$ ?

Lösung in Vorlesung oder [Stingl, 7. Aufl., S. 272]

Beispiel 2): $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, mit $f(x) = |x|$ ist in $x_0=0$ nicht differenzierbar! Zum Beweis genügt es $f$ eingeschränkt auf $R\backslash\{0\}$ zu betrachten. Auf $R\backslash\{0\}$ ist $f$ nämlich differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

An der Ableitung erkennt man unmittelbar, dass der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten bei $x=0$ verschieden sind, nämlich

$$z^+ = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \text{ bzw. } z^- = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1.$$

Nach **Satz S 4-2** existiert aber dann der Grenzwert an der Stelle 0 nicht, und dies bedeutet nach **Def D 5-1**, dass die Funktion bei $x_0=0$ nicht differenzierbar ist.

Anschaulich: f hat an der Stelle $x_0=0$ einen "Knick".

Nicht jede in $x_0$ stetige Funktion ist also dort auch differenzierbar. Umgekehrt gilt aber:

| | |
|---|---|
| **Satz S 5-1** | Jede in $x_0$ differenzierbare Funktion ist dort auch stetig. |

Beweis [Stingl, 7. Aufl., S. 273]:

Wenn $f$ an der Stelle $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist, dann heißt das, dass $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Daraus können wir die Stetigkeit herleiten:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{0} = 0$$

♦

**Def D 5-2** **n-te Ableitung und stetige Differenzierbarkeit**

Sei $f : D \to \mathbf{R}$, mit $x \mapsto f(x)$, $x_0 \in D$ differenzierbar in $x_0$, und es sei die Ableitung $f'$ ebenfalls differenzierbar, dann ist zweite Ableitung von $f$, nämlich $f''$, definiert durch die Ableitung der Funktion $f'$.

Schreibweise: $$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Entsprechen werden die 3., 4. Ableitung usw. definiert. Wir formulieren allgemein die **n-te Ableitung** von f mit $n \in \mathbf{N}$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

f heißt **n-mal stetig differenzierbar**, falls f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist.

## 5.3. Ableitungsregeln

**Satz S 5-2 Summenregel**

Sind die Funktionen u,v differenzierbar, so auch (u+v) mit $(u + v)' = u' + v'$

**Satz S 5-3 Faktorregel**

Ist u differenzierbar, so auch $c \cdot u$ mit $c \in \mathbf{R}$ mit $(c\,u)' = c\,u'$

**Satz S 5-4 Produktregel**

Sind die Funktionen u,v differenzierbar, so auch $(u \cdot v)$ mit $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

**Satz S 5-5 Quotientenregel**

Sind u,v differenzierbar und ist $v(x) \neq 0$, so auch (u/v) mit $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Beispiel: $f : \mathbf{R}\backslash\{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2}{x+1}$

$$u'(x) = 2x, \; v'(x) = 1 \,.$$

Damit folgt nach der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

**Satz S 5-6** **Kettenregel**

Seien $f: D_f \rightarrow W_f$, $g: D_g \rightarrow W_g$. Sei $f$ differenzierbar in $x \in D_f$ und $u = f(x) \in D_g$. Weiterhin sei $g$ differenzierbar an der Stelle $u$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar an der Stelle $x \in D_f$, und es gilt

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(u)|_{u=f(x)} \cdot f'(x) \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x)\end{aligned}$$

Man nennt $g'$ die <u>äußere Ableitung</u>, $f'$ die <u>innere Ableitung</u> von $g \circ f$.

<u>MERKREGEL</u>: "**äußere Ableitung mal innere Ableitung**". Man spricht auch von "**Nachdifferenzieren**": Nachdem man $g$ an der Stelle $u=f(x)$ abgeleitet hat, muss man $f$ noch an der Stelle $x$ "nachdifferenzieren".

Zur Verkettung von Funktionen vergleiche man **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**.

$g'(f(x))$ ist eine mathematisch etwas laxe Schreibweise für $g'(u)|_{u=f(x)}$. Man muss im Kopf behalten, dass bei $g'()$ die Ableitung nach $u$, nicht nach $x$, gemeint ist.

<u>Beispiel</u>: $h : \mathbf{R}\backslash\{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2$

Innere Funktion $u = f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Äußere Funktion $g(u) = u^2$. Dann ist $h = g \circ f$.

Erst $g$ nach $u$ differenzieren: $g'(u) = 2u$ und dort für $u$ wieder $f(x)$ einsetzen. Dann $f'(x)$ nachdifferenzieren (s. Beispiel Quotientenregel):

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \underbrace{2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}}_{f'(x)}$$

**Übersicht zu Ableitungen bekannter Funktionen**

| Funktion | Ableitung | Inverse Funktion | Ableitung |
|---|---|---|---|
| $x^a$, i.a. x>0 | $ax^{a-1}$ | $\sqrt[a]{x}$, $a \in N$, i.a. x>0 | $\frac{1}{a\sqrt[a]{x^{a-1}}}$ |
| sin x | cos x | arcsin x, \|x\| <1 | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| cos x | -sin x | arccos x, \|x\| <1 | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| sinh x | cosh x | arsinh x | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| cosh x | sinh x | arcosh x, $x \geq 1$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| tan x, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | arctan x | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| cot x, $x \neq n\pi$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | arccot x | $-\frac{1}{1+x^2}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | lnx, x>0 | $\frac{1}{x}$ |
| $a^x$, a>0, $a \neq 1$ | $a^x \ln a$ | $\log_a x$, x>0 | $\frac{1}{x \ln a}$ |
| | | | |

WICHTIG: Die e-Funktion ist die <u>einzige</u> Funktion, die gleich ihrer eigenen Ableitung ist.

Einige Formeln werden als Beispiel in Vorlesung vorgerechnet.

Ü

**<u>Übung:</u>** Ableiten!

(a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ (b) $g(x) = \sin(x^3)$

(c) $h(x) = \exp(\sin(x^2)) = e^{\sin(x^2)}$

**<u>Ableitung der Betragsfunktion:</u>**

Hier zur Sicherheit immer Fallunterscheidung machen! Beispiel:

$$f(x) = \left|(x+1)^3\right|$$

Fall 1: $(x+1)^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$:

Dann ist $f(x) = (x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3(x+1)^2$

Fall 2: $(x+1)^3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$:

Dann ist $f(x) = -(x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3(x+1)^2$

Zusatzfrage: Ist f '(-1) definiert?

**Übung:** Berechnen Sie die Ableitung von $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$. Ist g'(0) definiert?

*--- diesen Teil im Selbststudium, wenn wenig Zeit ---*

**Satz S 5-7** **Ableitung der Umkehrfunktion**

Sei $f: D_f \to W_f$ differenzierbar in $x \in D_f$ und sei $f'(x) \neq 0$. Dann gilt für alle $x$ im Definitionsbereich der Umkehrfunktion $f^{-1}$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

**Beweis** (ist eine einfache Folgerung aus der Kettenregel):

Wir starten mit der Identität $f(f^{-1}(x))=x$ und bilden auf beiden Seiten die Ableitung:

$$\underbrace{f'\left(f^{-1}(x)\right)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(f^{-1})'(x)}_{\text{innere Ableitung}} = 1$$

. Durchdividieren mit dem 1. Term liefert die Behauptung.

**Beispiel:** Leiten Sie $(\ln(x))' = 1/x$ (x>0) aus der Formel $(e^x)' = e^x$ her.

Lösung:

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x) \quad \forall x > 0$$

Es gilt also nach **Satz S 5-7** für alle x>0:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

q.e.d.

**Übung:** Leiten Sie ebenso die Formel für $\arcsin(x)$ und $\arctan(x)$ her.

[Hinweis: trigonometrischen Pythagoras zur Vereinfachung verwenden!]

Lösung der Übung:

$f(x)=\sin(x)$ hat Ableitung $\cos(x)\neq 0$ für alle $x\in ]0,\pi[$. $f^{-1}(x)=\arcsin(x)$ ist definiert für alle $x\in ]-1,1[$. Es gilt also nach **Satz S 5-7** für alle $x\in ]-1,1[$:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)=\tan(x)$ hat Ableitung $1+\tan^2(x)\neq 0$ für alle $x\in D_f$. $f^{-1}(x)=\arctan(x)$ ist definiert für alle $x\in$ **R**. Es gilt also nach **Satz S 5-7** für alle $x\in$ **R**:

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

## 5.4. Satz von Taylor

Welches Polynom n. Grades hat in $x_0$ die gleichen 0., 1., …, n. Ableitungen wie f(x)?

| k | $P_n^{(k)}(x-x_0)$ | $P_n^{(k)}(x_0)$ | soll gleich sein zu: |
|---|---|---|---|
| 0 | $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ | $a_0$ | $f(x_0)$ |
| 1 | $+ a_1 \quad + 2a_2(x-x_0) + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1}$ | $a_1$ | $f'(x_0)$ |
| 2 | $+ 2a_2 \quad + \ldots$ | $2a_2$ | $f^{(2)}(x_0)$ |
| … | … | … | … |
| n | $+ n!a_n$ | $n!a_n$ | $f^{(n)}(x_0)$ |

Eine Antwort liefert der **Satz von Taylor**, der eine **enorme praktische Bedeutung** hat:

- damit rechnet der Taschenrechner komplizierte Funktionen wie sin(x), ln(x) aus,
- damit können wir uns von komplizierten Funktionen lokale Näherungen als einfaches Polynom machen
- und wir können abschätzen, welchen Fehler wir bei der Näherung maximal machen

**Satz S 5-8 Satz von Taylor**

Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine $n+1$-mal differenzierbare Funktion. $x_0$ und $x$ seien aus $[a,b]$. Dann ist

$$P_n(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

ein Polynom vom Grad n in der „Variablen $h = x - x_0$“. Wir bezeichnen $P_n(h)$ als das **Taylor-Polynom** von $f$ im Punkt $x_0$.

Das Taylorpolynom hat in $x_0$ die gleichen Ableitungen 0. bis n. Ordnung wie $f$ und ist in der Nähe von $x_0$ eine "gute" Näherung für $f$. Präziser: Der Fehler kann durch die Restglied-Formel (**Satz S 5-9**) abgeschätzt werden:

BEACHTE:

- $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0),\ldots, f^{(n)}(x_0)$ sind reine Zahlen, keine Funktionen!!

**Beispiel:** Wir möchten den natürlichen Logarithmus für alle $x \in [1,2]$, speziell für $x=1.5$ mit einem Taylor-Polynom der Ordnung $n=3$ um $x_0=1$ abschätzen.

Wir verwenden den Satz von Taylor mit $f = \ln$ , $x_0=1$, $h=x-x_0= 0.5$ , $n=3$ und stellen die folgende Tabelle auf

| n | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(1)$ |
|---|---|---|
| 0 | $\ln(x)$ | 0 |
| 1 | $x^{-1}$ | 1 |
| 2 | $-x^{-2}$ | -1 |
| 3 | $+2x^{-3}$ | +2 |
| 4 | $-6x^{-4}$ | |

$$P_3(x-1) = \ln(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\cdot(x-1)^3$$

$$= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2\cdot\frac{1}{6}(x-1)^3 \qquad \Rightarrow$$

$$\ln(1.5) \approx P(1.5-1) = \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{24} = 0.41\overline{6}$$

Welcher Fehler steckt maximal in dieser Abschätzung?

**Satz S 5-9 Restglied-Formel**

Sei $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ eine $n+1$-mal differenzierbare Funktion und sei $P_n(x-x_0)$ das Taylorpolynom von $f$ in $x_0$. $x_0 \le x \le x_1$ seien aus $[a,b]$, mit $x_0<x$. Sei $C$ eine obere Schranke von $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ im Intervall $I = [x_0,x_1]$ ist. Die Absolutdifferenz $\left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - P_n(x-x_0)\right|$ bezeichnet man als **Restglied**. Dann gilt für alle $x \in I$ die Fehlerabschätzung

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{C}{(n+1)!}\cdot\left|x-x_0\right|^{n+1}$$

(Gilt dagegen $x_1 \le x \le x_0$, so ist das Intervall $I = [x_1,x_0]$ zu nehmen.)

Bew.: [Stingl, 7. Aufl., S. 308]

BEACHTE:

- Die Fehlerabschätzung ist wie ein **Vertrag mit einem Lieferanten**: Der Lieferant sichert zu, dass die von ihm gelieferten Bauteile an der Stelle x nie eine größere Abweichung vom Idealmaß haben als $R_n(x)$.

1. Schritt: **C bestimmen**: Wo ist $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ im Intervall $[1,2]$ maximal?

Weil $|f^{(4)}(x)|=6x^{-4}$ im Intervall $[1,2]$ monoton fallend ist (denn die Steigung $(6x^{-4})'=-24x^{-5}$ ist in $[1,2]$ immer negativ), ist der linke Rand eine obere Schranke $C=|f^{(4)}(1)|=6$.

2. Schritt: **Einsetzen in Restgliedformel** $\frac{C}{(n+1)!}\cdot\left|x-x_0\right|^{n+1}$

Daher lautet die Restgliedabschätzung für $x \in [1,2]$

$$\left|R_3(x)\right| = \left|f(x)-P_n(x-1)\right| \le \frac{6}{(3+1)!}\cdot\left|x-1\right|^{3+1}$$

Speziell für x=1.5:

$$\left|R_3(1.5)\right| \le \frac{6}{(3+1)!}\cdot\left|1.5-1\right|^{3+1} = \frac{6}{24\cdot 16} = 0.0156$$

der relative Fehler 0.0156/0.4166 ist also kleiner als 4%.

**Probe:** Mit dem Taschenrechner überprüft man leicht, dass

$$\left|\ln(1.5)-0.4166\right| = 0.01120$$

diese Restgliedabschätzung auch erfüllt.

Die Abschätzung kann (für viele Funktionen) mit höherem n beliebig verbessert werden!

**Übung**: Bestimmen Sie das Taylorpolynom zu $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ zum Grade 5. Wie genau ist die Abschätzung für $x = 0.3$?

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Wie Abbildung 5-2 zeigt, wird die Sinus-Funktion durch ein Taylorpolynom vom Grade 7 bereits gut auf dem Intervall $(-\pi, +\pi)$ dargestellt.

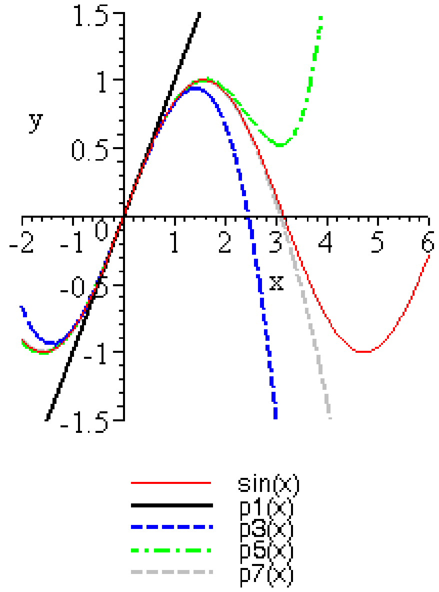



**Abbildung 5-2: Approximation der Sinus-Funktion durch seine Taylorpolynome im Punkt x=0.**
**(-- in Maple zeigen! )**

**Anwendungsfall FPGA:** Das mit dem Restglied kommt vielen Studierenden meist erstmal „spanisch" vor. Zum besseren Verständnis betrachten wir folgendes Beispiel: Sie wollen auf einem Embedded System (FPGA = Field Programmable Gate Array, Handy o.ä.) eine bestimmte Applikation programmieren, die es erfordert, dass die Funktion $f(x) = \cos(x) + \sin^2(2x)$ gerechnet wird. Nun kann Ihr FPGA keine trigonometrischen Berechnungen, die Grundrechenarten kann er aber wohl.

Sie können nun f(x) durch sein Taylorpolynom approximieren. Dem Anwender soll auch bei jeder Eingabe x von der Applikation gesagt werden, wie groß der Fehler ist. Natürlich haben Sie auch keine trigonometrischen Funktionen für die Fehlerbestimmung zur Verfügung, Sie können also nicht $|f(x) - P_n(x)|$ auf dem FPGA rechnen. Hier kommt nun die Rettung in Form des Restgliedes: Mit der Formel

$$|R_n(x)| \le \frac{C}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

können Sie den Fehler für jedes x abschätzen, ohne eine trigonometrische Berechnung zu brauchen. Dazu müssen Sie nur zum Zeitpunkt der Programmierung, wenn Sie alle trigonometrischen Funktionen zur Hand haben, die Konstante C abschätzen und in Ihre Applikation einbauen.

Ü

**Übung:** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x/2)$$

und der Entwicklungspunkt $x_0=0$.

1. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_2(x)$.
2. Wie lautet nach **Satz S 5-9** die Restgliedformel für $|R_2(x)|$, die Sie für jedes x auf Ihrem FPGA rechnen können?
3. Was gibt die die Restgliedformel für x=0.5 und x=-2 für einen Wert an?
4. Wieviel Multiplikationen brauchen Sie auf dem FPGA je x-Wert?

Hinweis 1: Mit der Formel 2sin(a)cos(a) = sin(2a) (an richtiger Stelle eingesetzt!) können Sie sich das Ableiten deutlich vereinfachen.

Hinweis 2: Schätzen Sie im Restglied einfach Sinus und Cosinus durch 1 ab (!)

Lösung in Vorlesung.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

**Fazit: Man braucht nur 2 Multiplikationen für $P_2(x-x_0)$ und 3 Multiplikationen für $R_2(x)$ !! Das ist eine ganz erhebliche Vereinfachung und macht Ihre Applikation auf dem FPGA erst lauffähig.**

Ü

**Übung:** Näherungsformel für "Blutroter Sonnenuntergang am Äquator":

Wir hatten in Übungsblatt 3 (Trigonometrische Funktionen) die Formel

$$h = R\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

($\alpha=2\pi T/1440$ über Dreisatz und T = Zeit in Minuten) für die Höhe des Berges hergeleitet. Typischerweise sind die Winkel $\alpha$ sehr klein. Wie kann man daraus eine einfache Formel für den Zusammenhang Höhe vs. Verlöschzeit herleiten? Leiten Sie die Faustformel her: "Höhe Berg = 57 m mal Verlöschzeit[min] **zum Quadrat**."

Oder leiten Sie her: $h(\alpha) = \frac{1}{2}R\alpha^2 + O(\alpha^4)$

## *5.5. Regeln von de l'Hospital*

- Selbststudium, ausführlicher in Übung -

Für die Analyse von Kurven haben die Regeln von de l'Hospital eine besondere Bedeutung. Sie stellen ein Hilfsmittel für die Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen in „Ausnahmefällen" dar.

**Satz S 5-10 Regeln von de l'Hospital**

Seien $f$ und $g$: $U(x_0) \to \mathbf{R}$ auf einer Umgebung von $x_0$ differenzierbare Funktionen, und es sei $g'(x_0) \neq 0$.

Unter der Voraussetzung $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ ("0/0-Situation", **Regel 1**) oder unter der Voraussetzung $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ ("$\infty/\infty$-Situation", **Regel 2**) gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**falls** der letztgenannte Grenzwert existiert.

Beispiel: Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital!

Mit $f(x)=\sin x$ und $g(x)=x$ sind die Voraussetzungen der 1. Regel von de l'Hospital erfüllt:

- Differenzierbarkeit von $f$ und $g$ in einer Umgebung von $x=0$,
- $g'(0)=1\neq 0$,
- $f(0)=g(0)=0$.

Wir betrachten deshalb $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$. Aus der Existenz dieses Grenzwertes folgt nunmehr also $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

Bemerkungen: a) Bleibt der Ausdruck $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ unbestimmt, so können die Regeln von de l'Hospital iterativ angewendet werden.

Beispiel: Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Ü

b) Existieren der Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nur links- oder rechtsseitig, so gelten die Regeln von de l'Hospital ebenfalls links- bzw. rechtsseitig.

Betrachte als Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$

Wähle $f(x) = \ln x$ und $g(x) = x^{-1}$. Zeige, dass mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g'(x) = -x^{-2}$ der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$ existiert. Das bedeutet $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

c) Die Regeln von de l'Hospital gelten auch für $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ ♦

d) Existiert aber der letztgenannte Grenzwert in Satz 5-11 **nicht**, ist also z.B. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, dann darf mit dem Ergebnis **nicht** weitergerechnet werden. Beispiel hierzu in den Übungen!

## 5.6. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Der große Nutzen der Differentialrechnung liegt darin, dass man den Verlauf von Kurven quantitativ "in den Griff bekommt". Über Ableitungen können wir die Minima und Maxima differenzierbarer Funktionen direkt ausrechnen.

Dies hat vielfältige Anwendungen. Hier eine Extremwertaufgabe als einführendes **Beispiel**:

> Eine Produktionsmaschine kostet $K=90000€$. Wenn sie $t$ Jahre gehalten wird, dann sind die jährlichen Abschreibungskosten $A(t) = K/t$. Die mittleren jährlichen Reparaturkosten seien $R(t) = 100+3t^3$ €. Wie viele Jahre soll man die Maschine halten, um die Summe $A(t) + R(t)$ zu minimieren?

Lösung am Ende des Kapitels.

Folgende Eigenschaften von Funktionen können über Ableitungen errechnet werden

- Monotonie u. Krümmungsverhalten
- Extremwerte
- Wendepunkte und Wendetangente
- Asymptoten [s. Stingl04]

### 5.6.1. Monotonie und Krümmungsverhalten

**Satz S 5-11 Monotonie**

Sei $I = [a,b] \subseteq D_f$ ein Intervall und $f: D_f \rightarrow W_f$ eine differenzierbare Funktion. Es gilt:

$f'(x) \geq 0$ (bzw. $\leq 0$) für alle $x \in I \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend (bzw. fallend) in $I$.

$f'(x) > 0$ (bzw. $< 0$) für alle $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend (bzw. fallend) in $I$.

Beachte: Bei "streng monoton" gilt nur das "⇒" –Zeichen. Die strenge Monotonie gilt auch, wenn "f'(x)>0 in I bis auf endlich viele $x \in I$"

Beispiel: $f(x)=x^3$ ist streng monoton wachsend, obwohl $f'(0)=0$, aber eben nur an dieser einen Stelle.

- Selbststudium -

**Satz S 5-12 Krümmungsverhalten (konvex/konkav)**

Sei $I = [a,b] \subseteq D_f$ ein Intervall und $f: D_f \rightarrow W_f$ eine differenzierbare Funktion. Sei $s(x_1,x_2)$ die Sekante, die $x_1,x_2$ verbindet. Es gilt:

$f$ ist **konkav** auf $I \Leftrightarrow$ für alle $x_1,x_2 \in I$ verläuft $s(x_1,x_2)$ unterhalb des Funktionsgraph

$f$ ist **konvex** auf $I \Leftrightarrow$ für alle $x_1,x_2 \in I$ verläuft $s(x_1,x_2)$ oberhalb des Funktionsgraph

Das Krümmungsverhalten ergibt sich aus der 2. Ableitung:

$f$ ist **konkav** auf $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I$

$f$ ist **konvex** auf $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$

### 5.6.2. Extremwerte

**Def D 5-3 Extremwerte von Funktionen**

$f$ besitzt an der Stelle $x_0$ ein <u>relatives Maximum</u>, falls in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ gilt

$f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in U(x_0)$

$f$ besitzt an der Stelle $x_0$ ein <u>relatives Minimum</u>, falls in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0$ gilt

$f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in U(x_0)$

**Satz S 5-13 <u>Notwendige</u> Bedingung für Extremwerte differenzierbarer Funktionen**

Sei $f$ differenzierbar und $f$ besitze in $x_0$ einen relativen Extremwert (Minimum oder Maximum), dann folgt $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

**Satz S 5-14 <u>Hinreichende</u> Bedingung für Extremwerte differenzierbarer Funktionen**

Eine Funktion $f$ sei 2-mal differenzierbar und es gelte $f'(x_0) = 0$.

Dann folgt aus $f''(x_0) < 0$ : $f$ hat in $x_0$ ein <u>Maximum</u>,

aus $f''(x_0) > 0$ : $f$ hat in $x_0$ ein <u>Minimum</u>.

BEACHTE: Für $f''(x_0) = 0$ kann **Satz S 5-14** <u>keine</u> Aussage treffen → s. **Satz S 5-15**

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x^2$

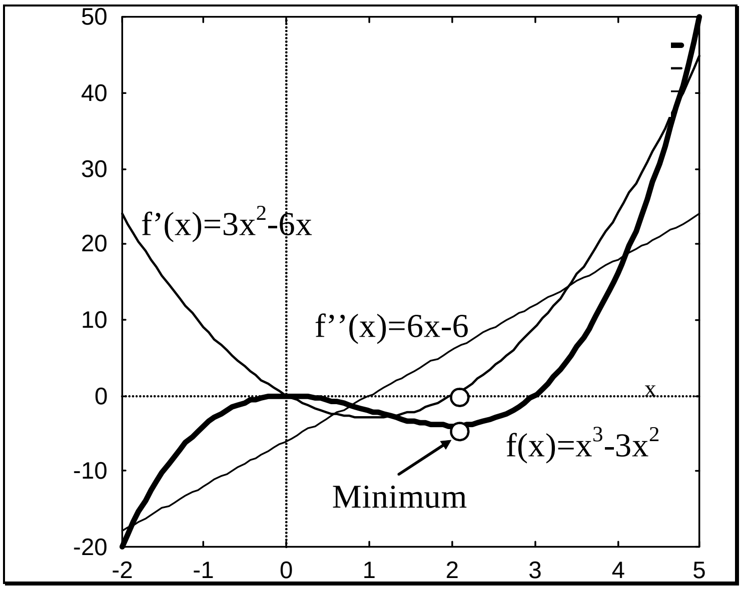



**Abbildung 5-3: $f(x) = x^3 - 3x^2$ mit 1. und 2. Ableitung**

$f(x) = x^3 - 3\,x^2$ ist eine zumindest 2-mal stetig differenzierbare Funktion:

$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x$

$f''(x) = 6\,x - 6.$

Wir prüfen zunächst die notwendige Bedingung für Extrema: $f'(x_0)=0$ . Hier also

$$3\,x_0^2 - 6\,x_0 = 0$$

Die Nullstellen von $f'$ lauten: $x_{0,1}=0$ bzw. $x_{0,2}=2$. Für diese beiden Nullstellen von $f'$ prüfen wir jetzt das hinreichende Kriterium $f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$. Es gilt

$$f''(x_{0,1}) = 6\,x_{0,1} - 6 = -6 \quad < 0$$

$$f''(x_{0,2}) = 6\,x_{0,2} - 6 = +6 \quad > 0$$

Aus **Satz S 5-14** folgt $x_{0,1}$ ist ein Maximum und $x_{0,2}$ ist ein Minimum von $f$ (siehe auch Abbildung). ♦

Bemerkung: In 95% aller Fälle reichen **Satz S 5-13** und **Satz S 5-14**. ABER: Es gibt Fälle, in denen die beiden Kriterien zu keiner Entscheidung über Minimum bzw Maximum führen.

-- wenn Zeit knapp, dann diesen Teil im Selbststudium --

Beispiel 1: $f(x) = x^3$ . Hier ist das notwendige Kriterium bei $x_0 = 0$ erfüllt, das hinreichende nicht. $x_0 = 0$ ist auch kein Extremwert, sondern eine sogenannte Wendestelle.

Beispiel 2: $f(x) = x^4$ . Hier ist das notwendige Kriterium bei $x_0 = 0$ erfüllt, das hinreichende nicht. Trotzdem ist $x_0 = 0$ ein Extremwert, und zwar ein Minimum (s. Abb. 5.4)

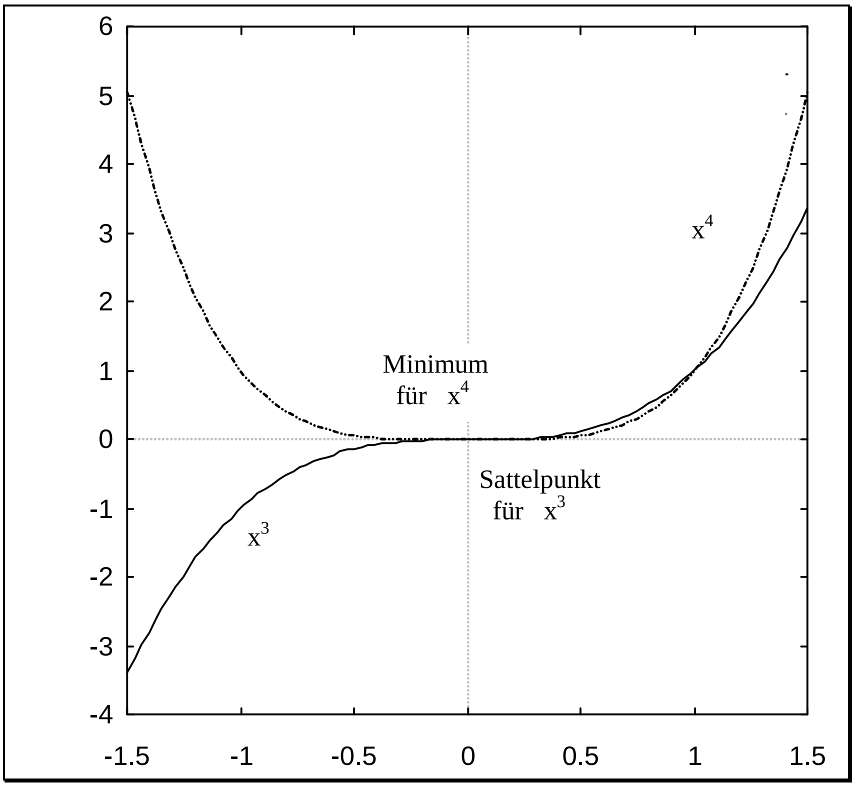



**Abbildung 5-4: Veranschaulichung von $x^3$ mit Sattelpunkt bei x = 0 und $x^4$ mit Minimum bei x = 0**

Wir führen deshalb ein allgemeineres hinreichendes Kriterium ein, das auch für den Fall $f''(x_0)=0$ gilt:

**Satz S 5-15 Notwendige und hinreichende Bedingung für Extremwerte, bzw. Sattelpunkte differenzierbarer Funktionen**

Sei $f$ $n$-mal differenzierbar mit $n \geq 2$, und es gelte $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

a) Ist $n$ <u>gerade</u>, so hat $f$ in $x_0$ ein <u>Extremum</u>, und zwar falls

$f^{(n)}(x_0) < 0$ : $f$ hat in $x_0$ ein Maximum,

$f^{(n)}(x_0) > 0$ : $f$ hat in $x_0$ ein Minimum.

b) Ist $n$ <u>ungerade</u>, so hat $f$ in $x_0$ kein Extremum, sondern einen sogenannten <u>**Sattelpunkt**</u>.

### 5.6.3. Wendepunkte

**Def D 5-4 Wendepunkt und Sattelpunkt**

Sei $f$ $n$-mal differenzierbar mit $n>2$, und es gelte $f''(x_0)=....=f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, und $n$ sei eine <u>ungerade</u> Zahl, so hat $f$ in $x_0$ einen sogenannten <u>Wendepunkt</u>.

Häufigster Fall $n=3$: $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

Ein **Sattelpunkt** ist ein Spezialfall eines Wendepunktes mit horizontaler Steigung, das heißt mit $f'(x_0) = 0$.

Wendetangente

$w(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

(Taylor-Polynom 1. Grades in $x_0$)

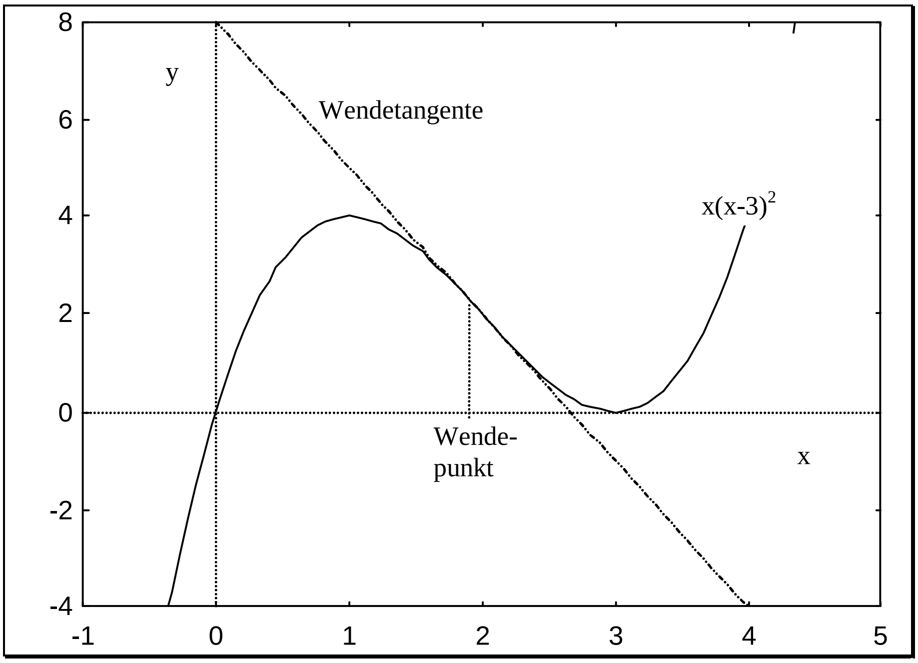



**Abbildung 5-5: Wendepunkt x = 2 und Wendetangente an die Funktion $x(x-3)^2$**

Die **Wendetangente** im Wendepunkt $x_0$ ergibt sich aus der Steigung und Funktionswert im Wendepunkt

$$w(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

(Taylor-Polynom 1. Grades in $x_0$)

Ü

<u>**Übung:**</u> Bestimmen Sie rechnerisch Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Wendetangente(n) für

$f(x) = x(x-3)^2$.

**Übung:** Lösen Sie die Eingangsaufgabe zu Kap. 5.6:

Eine Produktionsmaschine kostet K=90000€. Wenn sie t Jahre gehalten wird, dann sind die jährlichen Abschreibungskosten A(t) = K/t. Die mittleren jährlichen Reparaturkosten seien $R(t) = 100+3t^3$ €. Wie viele Jahre soll man die Maschine halten, um die Summe A(t) + R(t) zu minimieren?

D.h. lösen Sie $f(t) = \frac{K}{t} + 100 + 3t^3 \overset{!}{=} \text{Min}$ für K=90000€.

Weitere Extremwertaufgaben in Übungen!

## 5.7. *Fazit*

### 5.7.1. Kurvendiskussion

Wir stellen nun die Kriterien zusammen, nach denen eine umfassende Kurvendiskussion durchgeführt werden kann:

**Def D 5-5 Kurvendiskussion**

In einer Kurvendiskussion sind folgende Merkmale einer (differenzierbaren) Funktion zu untersuchen:

1. Definitionsbereich bzw. Definitionslücken
2. Wertebereich
3. Symmetrie
4. Periodizität
5. Nullstellen und Pole
6. Grenzwerte bei Annäherung an Definitionslücken
7. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ (Grenzwerte, Asymptoten)
8. Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte)
9. Wendepunkte (mit Wendetangente, Spezialfall: Sattelpunkt)
10. Graph der Funktion **zeichnen**

Zweckmäßigerweise geht man meist in der angegebenen Reihenfolge vor.

In einer **verkürzten Kurvendiskussion** können die Punkte Wertebereich, Symmetrie, Periodizität, Grenzwerte an den Definitionslücken, Asymptoten, Wendetangente, Sattelpunkt **entfallen**.

### 5.7.2. Wichtige Ergebnisse dieses Kapitels

– **Ableitung** = Steigung einer Funktion
– Lösung von **Extremwertaufgaben**: <u>notwendige</u> Bedingung für Minimum: f'(x)=0, <u>hinreichende</u> Bedingung: erste nichtverschwindende Ableitung $f^{(n)}(x) > 0$ **UND n gerade**.

– Satz von **Taylor**: approximiert komplizierte Funktion (z.B. $e^{x \cos x} \sin x$) durch einfaches Polynom $\sum_i a_i (x - x_0)^i$. Nutzen der Taylor-Approximation:

a. numerische Approximation
b. einfachere Formeln für symbolisches Rechnen