Übungsblatt 5 : Lineare Algebra

Aufgabe 5.1 Rechnen in Vektorräumen

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \qquad 4\vec{u} + 3\vec{w}, \qquad -5\vec{v} + \vec{u}, \qquad (5\vec{u} - 3\vec{w}) - (9\vec{w} + 2\vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 8\vec{x} + \vec{w}$

Aufgabe 5.2 Skalarprodukt

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

a) $2\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$ (b) $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + 4\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{x}$

Aufgabe 5.3 Vektoren – lineare Unabhängigkeit

Gegeben seien die Vektoren

$a)\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$b)\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$c)\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d)\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Prüfen Sie, ob diese Vektoren eine Basis des $\mathbf{R}^3$ bzw. des $\mathbf{R}^2$ bilden.

Aufgabe 5.4 Basiswechsel

Machen Sie sich noch einmal klar, was eine **Basis** eines n-dimensionalen Vektorraums ist. So ist zum Beispiel für n=3 jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Basisvektoren **linear kombinieren**. Falls es sich bei den Basisvektoren um die Einheitsvektoren handelt, sind die Koordinaten des Vektors genau die Linearfaktoren aus der Linearkombination. Wenn nun eine andere Basis gegeben ist (also nicht die Einheitsvektoren), so kann man bezüglich dieser anderen Basis ebenso die Linearfaktoren der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors **bezüglich dieser Basis** nehmen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 5.5 Betrag von Vektoren

a) Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \quad mit \quad a \neq 0$$

b) Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren und sortieren Sie der Länge nach:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.6 Orthogonalität

Prüfen Sie nach, ob folgende Vektoren orthogonal zueinander sind:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie x so, dass die beiden folgenden Vektoren zueinander orthogonal sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.7 Winkel zwischen Vektoren

Bestimmen Sie den Winkel, den die beiden folgenden Vektoren einschließen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.8 Matrizenmultiplikation

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Aufgabe 5.9 Anwendungsbeispiel

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3, R4 für Bauteile B1,B2 und B3. Die Anzahl der verarbeiteten Bauteile pro Endprodukt sind in der zweiten Tabelle dargestellt.

	B1	B2	B3
R1	80	60	15
R2	61	4	0
R3	0	60	62
R4	85	20	90

	E1	E2
B1	3	5
B2	10	6
B3	18	20

Berechnen Sie die Tabelle, die übersichtlich den benötigten Rohstoffbedarf für je ein Endprodukt E1 und E2 darstellt.

Aufgabe 5.10 Inverse Matrix

a) Gegeben ist die Matrix A, bestimmen Sie die Inverse A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Gibt es zwei 2x2-Matrizen A und B, die beide nicht die Nullmatrix sind, deren Produkt aber die Nullmatrix ergibt.

Mathematik I – Übungsblatt 5 WS 19/20 Prof.Dr.W. Konen, Dr. A. Schmitter

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 5.11 Transponierte Matrix

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie x und y so, dass A'A=2E gilt.

(A' ist die Transponierte von A, E ist die Einheitsmatrix)

Aufgabe 5.12. Lineare Gleichungssysteme

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.13 Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus:***

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.14 Lineare Gleichungssysteme - Steckbriefaufgabe

Berechnen Sie unter Verwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** die Gleichung der ***Parabel 2. Ordnung***

$$y = ax^2+bx+c$$

die durch die Punkte A(-1;1) , B(3;-1) und C(5;7) verläuft.

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 5.15 Determinanten

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5.16 Determinanten

Berechnen Sie die Menge der $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$