Übungsblatt 5 : Lineare Algebra

Aufgabe 5.1 Rechnen in Vektorräumen

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \qquad 4\vec{u} + 4\vec{w}, \qquad -4\vec{v} + 2\vec{u}, \qquad (7\vec{u} - 4\vec{w}) - (8\vec{w} + 3\vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 8\vec{x} + \vec{w}$

Aufgabe 5.2 Skalarprodukt

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

a) $2\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$ (b) $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + 4\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{x}$

Aufgabe 5.3 Vektoren – lineare Unabhängigkeit

Gegeben seien die Vektoren

$a)$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$b)$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$c)$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d)$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Prüfen Sie, ob diese Vektoren eine Basis des $\mathbf{R}^3$ bzw. des $\mathbf{R}^2$ bilden.

Aufgabe 5.4 Basiswechsel

Machen Sie sich noch einmal klar, was eine **Basis** eines n-dimensionalen Vektorraums ist. So ist zum Beispiel für n=3 jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Basisvektoren **linear kombinieren**. Falls es sich bei den Basisvektoren um die Einheitsvektoren handelt, sind die Koordinaten des Vektors genau die Linearfaktoren aus der Linearkombination. Wenn nun eine andere Basis gegeben ist (also nicht die Einheitsvektoren), so kann man bezüglich dieser anderen Basis ebenso die Linearfaktoren der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors **bezüglich dieser Basis** nehmen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.5 Betrag von Vektoren

a) Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \quad mit \quad a \neq 0$$

b) Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren, welches ist der „längste“ Vektor?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.6 Orthogonalität

Prüfen Sie nach, ob folgende Vektoren orthogonal zueinander sind:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie x so, dass die beiden folgenden Vektoren zueinander orthogonal sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.7 Winkel zwischen Vektoren

Bestimmen Sie den Winkel, den die beiden folgenden Vektoren einschließen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen in der digitalen Übung vorzutragen

Aufgabe 5.8 Matrizenmultiplikation

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Aufgabe 5.9 Anwendungsbeispiel 1

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3, R4 für Bauteile B1,B2 und B3. Die Anzahl der verarbeiteten Bauteile pro Endprodukt sind in der zweiten Tabelle dargestellt.

	B1	B2	B3
R1	160	120	150
R2	6	4	2
R3	0	70	40
R4	80	40	70

	E1	E2
B1	30	50
B2	10	6
B3	20	18

Berechnen Sie die Tabelle, die übersichtlich den benötigten Rohstoffbedarf für je ein Endprodukt E1 und E2 darstellt.

Aufgabe 5.10 Anwendungsbeispiel 2

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3. Der wöchentliche Verbrauch der Rohstoffe während eines Monats ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Woche/Rohstoff	R1	R2	R3
1.Woche	8	4	12
2.Woche	10	6	5
3.Woche	7	8	5
4.Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen einem von zwei Lieferanten L1, L2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in folgender Tabelle angegeben sind (in virtuellen Geldeinheiten pro Mengeneinheit)

Rohstoff/Lieferant	L1	L2
R1	8	4
R2	10	6
R3	7	8

Vergleichen Sie die Rohstoffkosten für alle vier Wochen und entscheiden Sie, bei welchem Lieferanten die Firma bestellen soll

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zur Vorlesung so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen in der digitalen Übung vorzutragen

Aufgabe 5.11 Inverse Matrix

a) Gegeben ist die Matrix A, bestimmen Sie die Inverse A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Gibt es zwei 2x2-Matrizen A und B, die beide nicht die Nullmatrix sind, deren Produkt aber die Nullmatrix ergibt.

Aufgabe 5.12 Transponierte Matrix

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie x und y so, dass A'A=2E gilt.

(A' ist die Transponierte von A, E ist die Einheitsmatrix)

Aufgabe 5.13 Lineare Gleichungssysteme

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -9 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.14 Lineare Gleichungssysteme - Steckbriefaufgabe

Berechnen Sie unter Verwendung des ***Gauß'schen Lösungsalgorithmus*** die Gleichung der ***Parabel 2. Ordnung***

$$y = ax^2+bx+c$$

die durch die Punkte A(-1;1) , B(3;-1) und C(5;7) verläuft.

Aufgabe 5.15 Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2\lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & \lambda x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Für welche $\lambda \in R$ ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar?
b) Für welche $\lambda \in R$ existieren keine Lösungen?

Aufgabe 5.16 Determinanten

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5.17 Determinanten

Berechnen Sie die Menge der $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$