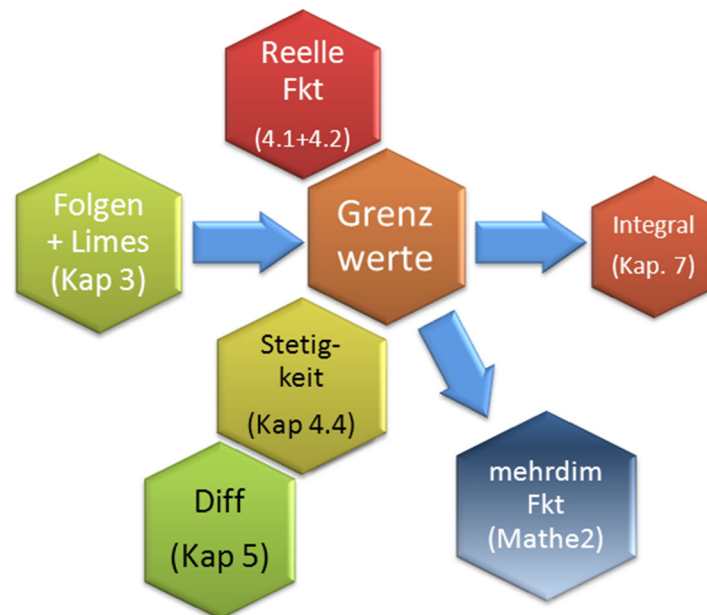


## 3. Zahlenfolgen

Einordnung:



### 3.1. Wozu InformatikerInnen Folgen brauchen

- Konvergenz von Folgen ist die Grundlage der Analysis (Differential- und Integralrechnung)
- Transzendente Gleichungen wie  $x \ln x = 50$  kann man näherungsweise über Folgen lösen (**Fixpunkt-Iteration**)
- Jede **Simulation** im Computer zerlegt die Zeit in kleine Schritte und berechnet somit Folgen  $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$  >> [WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme](#).
- **Laufzeit von Algorithmen**, Worst-case-Abschätzung durch obere Abschätzung zu bekannten Folgen. Oftmals schreibt man ein Programm und kann es für kleine Mengen (z.B.  $n=10$ ) austesten, aber in der Praxis wird es mit viel größeren Mengen (z.B.  $n=1.000.000$ ) laufen. Wie ist das Verhalten im Grenzwert großer Zahlen? Dies führt auf Folgen und die **Landausche  $O()$ -Notation**.

### 3.2. Definition und Eigenschaften von Folgen

Wir hatten ja bereits zur Definition reeller Zahlen den Begriff der Zahlenfolge benötigt. In diesem Kapitel soll der Begriff weiter vertieft werden.

#### Def D3-1: Zahlenfolge

Unter einer (unendlichen) Zahlenfolge versteht man eine eindeutige Abbildung der Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen auf einen Zahlenbereich.  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$

Die Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  heißen Glieder der Folge,  $a_n$  ist das n-te Glied.

**Beispiel:**

$$1.) a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad (\text{Bem.: } a_n \rightarrow 0)$$

Weitere Beispiele in Vorlesung

**Def D3-2: Monotonie von Folgen**

Eine Folge heißt:

**monoton wachsend** ( $\uparrow$ ), falls für alle  $n \in \mathbf{N}$  gilt:  $a_n \leq a_{n+1}$

**streng monoton wachsend**, falls für alle  $n \in \mathbf{N}$  gilt:  $a_n < a_{n+1}$

**monoton fallend** ( $\downarrow$ ), falls für alle  $n \in \mathbf{N}$  gilt:  $a_n \geq a_{n+1}$

**streng monoton fallend**, falls für alle  $n \in \mathbf{N}$  gilt:  $a_n > a_{n+1}$

**Def D3-3: Beschränktheit von Folgen**

Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Eine Folge heißt:

**nach oben beschränkt (n.o.b.)**, falls ein  $K \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $n$  gilt:  $a_n \leq K$

**nach unten beschränkt (n.u.b.)**, falls ein  $L \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $n$  gilt:  $a_n \geq L$

und

**beschränkt**, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

**Beispiele:**

$$1.) a_n = \frac{n}{2^n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots$$

Die Folge ist monoton fallend und beschränkt, z.B.  $L = 0, K = 1$ .

$$2.) a_n = n, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = 1, 2, 3, 4, \dots$$

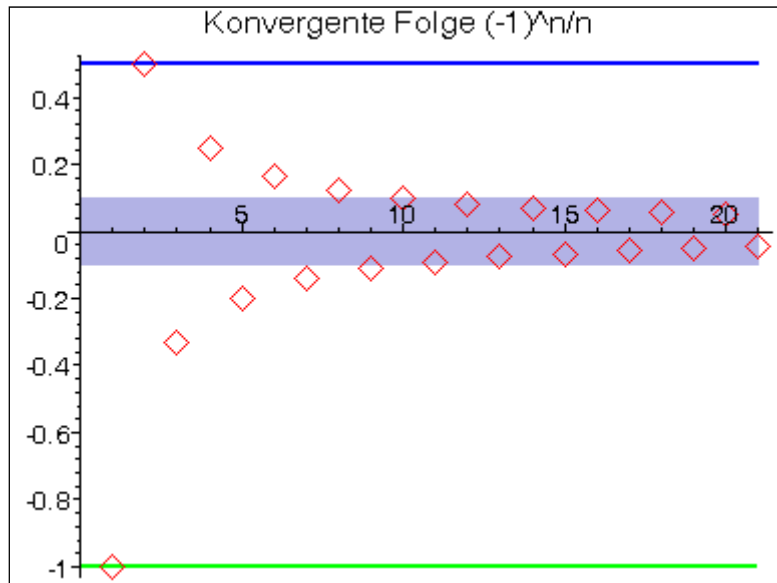
Die Folge ist streng monoton wachsend und nach unten beschränkt, z.B.  $L = 0$ , aber nach oben **unbeschränkt** (es existiert kein  $K$  mit  $a_n \leq K \forall n$ ).

### 3.3. Grenzwert einer Zahlenfolge

Schauen wir uns ein Beispiel

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

im Graphen an:



Anschaulich: Ab einem gewissen  $n$  liegen alle Folgeglieder im " $\varepsilon$ -Band" um Grenzwert  $g=0$ , egal wie schmal das Band ist.

BEACHTE: Grenzwert und (obere/untere) Schranke sind nicht dasselbe!! Die Folge hat die untere Schranke (z.B.)  $-1$ , die obere Schranke  $+1/2$  und den Grenzwert  $0$ .

Dieses anschauliche Bild " $\varepsilon$ -Band" wird nun in eine Definition übersetzt.

#### Def D3-4: Grenzwert einer Folge

$g$  heißt Grenzwert (Limes) der Folge  $(a_n)$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $n_0(\varepsilon)$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_0(\varepsilon)$  gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Existiert der Grenzwert einer Folge, dann heißt die Folge **konvergent**. Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt **divergent**.

Es gilt:

**Satz S3-1** Eine konvergente Folge ist beschränkt.

nur muss eben der Grenzwert nicht mit oberer/unterer Schranke zusammenfallen.

Die logische Umkehrung des Satzes ist manchmal auch nützlich:

**Satz S3-2** Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

Eine unbeschränkte Folge, bei der für jedes  $K$  ab einem bestimmten  $n_0(K)$  alle Folgenglieder über  $K$  liegen, heißt **bestimmt-divergent**, sie besitzt den **uneigentlichen Grenzwert**  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Genauso für **uneigentlichen Grenzwert**  $-\infty$ .

**Beispiel für Grenzwerte:**

1.)  $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$

d.h.  $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  "Nullfolge"

Beweis in Vorlesung

2.)  $a_n = 1 - (-1)^n, n \in \mathbf{N}$

d.h.  $(a_n) = 2, 0, 2, 0, 2, \dots$

$\Rightarrow (a_n)$  ist divergent

BEACHTEN: Nicht jede divergente Folge ist auch unbeschränkt (!!)

3.)  $a_n = n^2 + 5, n \in \mathbf{N}$

d.h.  $(a_n) = 6, 9, 14, \dots$

$(a_n)$  ist nach **Satz S3-2** divergent, weil  $(a_n)$  nicht beschränkt ist.

$(a_n)$  ist **bestimmt-divergent** und besitzt den **uneigentlichen Grenzwert**  $\infty$ .

### 3.3.1. Rechnen mit Grenzwerten

Wir wollen für beliebige Folgen ohne viel Aufwand den Grenzwert berechnen. Der Weg:

1. Für einige wenige fundamentale Folgen den Grenzwert kennen
2. Andere Folgen durch Rechnen mit Grenzwerten auf Fundamentalfolgen zurückführen

<b>Satz S 3-3 Fundamentale Nullfolgen</b>		
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (q)^n = 0$ für $ q  < 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$

<b>Satz S 3-4 Fundamentale bestimmt-divergente Folgen (+∞)</b>		
$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ für $q > 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty$ für $\alpha > 0$

<b>Satz S 3-5 Rechengesetze für Grenzwerte</b>	
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten $a$ und $b$ . Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n), \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ für $(b_n \neq 0, b \neq 0)$ und $(a_n)^r$ für $r \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt:	
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$	d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$	e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^r = a^r$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = ca$	

Rechentechnisch: Man kann den Limes auf die Einzelterme "nach innen ziehen", z.B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)}\right) \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)\right)^r$$

wenn der entstehende Term „entscheidbar“ ist.

Die Regeln von **Satz S 3-5** sind auch nutzbar, wenn Folgen  $a_n$  oder  $b_n$  gegen  $\pm\infty$  "konvergieren", wenn einer der nachfolgenden **entscheidbaren** Fälle vorliegt:

<b>Satz S 3-6 Sei <math>c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^+, \text{ also } d &gt; 0</math></b>			
$c + \infty = \infty$ $\infty \cdot d = \infty$	$\infty + \infty = \infty$ $\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{c}{\infty} = 0$ $\frac{d}{0^+} = \infty, \frac{d}{0^-} = -\infty$	$(\infty)^d = \infty$

$c + \infty = \infty$  ist so zu verstehen: Eine Folge, die gegen  $c$  konvergiert, plus eine Folge, die bestimmt divergent gegen  $\infty$  geht, ergeben zusammen eine Folge, die bestimmt divergent gegen  $\infty$  geht.

$0^+$  ist so zu verstehen: Eine Folge, die mit lauter positiven Werten gegen 0 konvergiert. Analog bezeichnet  $0^-$  eine Folge, die mit lauter negativen Werten gegen 0 konvergiert

Dagegen sind nachfolgende Ausdrücke "unentscheidbar", d.h. ohne weitere Untersuchung kann NICHTS ausgesagt werden:

$0 \cdot \infty = ?$	$\infty - \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$
----------------------	-----------------------	-------------------	-----------------------------

Dann muss man durch geeignete Umformungen versuchen, zu einer entscheidbaren Situation zu kommen.

In Vorlesung werden Folgerungen aus **Satz S 3-5** und **Satz S 3-6** gezeigt.

Regeln für die Berechnung von Grenzwerten:

- Komplizierte Ausdrücke auf Summe / Produkt / Quotient bekannter Folgen (meist Nullfolgen und konstante Folgen) zurückführen. (D.h. wenn möglich, den Limes "nach innen ziehen".)
- Bei Brüchen durch die größte Potenz **im Nenner** dividieren (**g.P.i.N.**).
- Wenn beim Nach-Innen-Ziehen eine unentscheidbare Situation (z.B.  $\infty - \infty$ ) entsteht, dann schauen, ob eine Zusammenfassung (z.B. auf gemeinsamen Hauptnenner) Klärung bringt.

**Beispiele:**

1a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 0$

1b)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{5n^3}$ . Wäre  $\frac{\infty}{\infty}$ , wenn wir Grenzwert einfach so nach innen ziehen, also

unentscheidbar. Natürlich mit „g.P.i.N.“ oder Kürzen einfach lösbar. Resultat:  $\frac{3}{5}$

1c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty}(-2) + \lim_{n \rightarrow \infty}(\frac{4}{n}) - \lim_{n \rightarrow \infty}(\frac{5}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty}(8) - \lim_{n \rightarrow \infty}(\frac{3}{n}) + \lim_{n \rightarrow \infty}(\frac{7}{n^2})} = \frac{-2 + 0 - 0}{8 - 0 + 0} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Hier haben wir zuerst „g.P.i.N.“ benutzt, damit konstante Folgen oder Nullfolgen entstehen und wir so den Limes nach innen ziehen dürfen.

1d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

1e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$



Zur Übung: 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n^2-1}{3n^2+2} \right)^2$  3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right)$

4)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}} \right)$

ACHTUNG: Später bei Funktionen werden wir noch einen allgemeineren Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow c}$  kennenlernen wobei c eine beliebige Zahl aus  $\mathbb{R}$  oder  $+\infty$  oder  $-\infty$  ist. **g.P.i.N. ist nur bei  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  oder  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$  verwendbar.**

### 3.4. Anwendungen für Zahlenfolgen

#### 3.4.1. Fixpunkt-Iteration

Die **Fixpunkt-Iteration** ist eine "quick-&-dirty"-Methode, um von nicht einfach lösbaren Gleichungen (sog. *transzendenten* Gleichungen) eine Lösung zu bestimmen:

1. Man bringt die Gleichung in die sog. **Fixpunkt-Form  $a = f(a)$** .  
(Hierfür gibt es oft zahlreiche Möglichkeiten, und man muss probieren, welche Lösung zum Ziel führt)
2. Jetzt startet man mit einem Wert  $a_1$  und bestimmt  $a_2 = f(a_1)$ ,  $a_3 = f(a_2)$ , ... usw., also allgemein:  $a_n = f(a_{n-1})$
3. Wenn die Folge  $(a_n)$  den Grenzwert  $a$  besitzt, dann ist  $a$  eine Lösung der transzendenten Gleichung.

Beispiel: Wir suchen eine numerische Lösung x für die Gleichung  $x + 1 = \sin(x)$ .  
(s. Vorlesung)

Beispiel: Wir suchen eine numerische Lösung x für die Gleichung  $x^2 = 2$ .

Lösung: Sei  $x \neq 0$ . Wir addieren  $x^2$  auf beiden Seiten und dividieren mit x durch:

$$2x^2 = x^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x + \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right) = f(x)$$

Ersetzen wir das x auf der linken Seite durch  $a_n$  und die x auf der rechten Seite durch  $a_{n-1}$ , so erhalten wir eine sog. **rekursive Folge**:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{2}{a_1} \right) \\ &\dots \\ a_n &= \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right) = f(a_{n-1}) \end{aligned}$$

Wir können nun mit dem Taschenrechner (oder Excel) Werte einsetzen und erhalten:

(in Excel vormachen)

$a_1=1, a_2=1.5, \dots, a_6=1.41421356$

Wieso quick & dirty?

- Es gibt für jede Gleichung unendlich viele Fixpunkt-Formen. Man hat also keine Garantie, alle Lösungen gefunden zu haben
- Nicht jede Fixpunkt-Form muss einen Grenzwert haben.

Aber immerhin kann man überhaupt eine Lösung für schwierige Gleichungen finden!

### 3.4.2. Landausche $O()$ -Notation

[Teschl, Bd. 1, S. 204-210] oder [Hachenberger05, S. 383-387]<sup>2</sup>

In der Informatik muss man oft die Laufzeit von Algorithmen abschätzen. Man weiß, dass eine Folge  $a_n$  gegen Unendlich geht, möchte aber wissen, wie schnell sie wächst, also zu welcher Wachstumsklasse sie gehört. Beispiel Matrixmultiplikation: Man braucht  $n^3$  Multiplikationen und  $n^2(n-1)$  Additionen, also insgesamt

$$a_n = 2n^3 - n^2$$

Operationen. Wie wächst die Laufzeit, wenn die Matrixgröße  $n$  (Zeilenzahl) steigt? Oft interessiert man sich für das Grenzwertverhalten großer  $n$ , und hier ist  $n^3$  der dominante Term :

#### Def D3-5: Landausche $O()$ -Notation

Seien  $A=(a_n)$  und  $B=(b_n)$ ,  $b_n \neq 0$  Folgen. Wir definieren die Menge "**Groß-O**" von **B** durch

$$O(B) = O(b_n) = \{ (a_n) \mid \text{Der Quotient } \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \text{ ist beschränkt} \}.$$

Man sagt dann: Die Folge  $A$  ist "**von der Ordnung  $O(B)$** ", als Formel:  $A \in O(B)$ .

Für  $A \in O(B)$  schreibt man üblicherweise (wenn auch ungenau)  $A = O(B)$ .

Beispiele:

$$1. 2n^3 - n^2 \in O(n^3), \text{ denn } \left| \frac{2n^3 - n^2}{n^3} \right| = \left| 2 - \frac{1}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

$$2. n + 2 \in O(n), \text{ aber auch } n + 2 \in O(n^2) \text{ oder } n + 2 \in O(4n)$$

$$3. (-1)^n \in O(1), \text{ denn } \left| \frac{(-1)^n}{1} \right| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$4. 6n \log n + 270n + 4 \in O(n \log n)$$

ANMERKUNG: Die Folge  $B=(b_n)$  wird dabei **meist** so gewählt, dass sie

<sup>2</sup> [Hartmann04, S. 245-249] bringt die  $O()$ -Notation auch, allerdings Schreibweise etwas unpräzise.



1. möglichst einfach ist (also  $b_n = n^3$  statt  $2n^3 - n^2$  im Matrixbeispiel)
2. möglichst "billig" ist, im Sinne von Laufzeit-"Kosten" (also  $b_n = n^3$  statt  $n^4$  oder  $2^n$ )

WARNUNG: Das Gleichheitszeichen in Aussagen mit der  $O()$ -Notation ist NICHT das Gleichheitszeichen der Arithmetik, sondern nur eine (ungenaue) Abkürzung für " $\in O(B)$ ". Denn aus  $A=O(B)$  und  $C=O(B)$  folgt NICHT  $A=B$  und NICHT  $A=C$ . Mit der  $O()$ -Notation drückt man aus, dass die Folgen  $A$ ,  $B$  und  $C$  für große  $n$  zur selben Wachstumsklasse (Menge) gehören.

Es gilt folgende Reihung für Wachstumsklassen:

<b>Satz S 3-7</b> <b>Landau-<math>O()</math>-Reihenfolge</b>
$O(1) < O(\log(n)) < O(n) < O(n \log(n)) < O(n^2) < O(n^2 \log(n)) < \dots < O(2^n)$

Hierbei bedeutet z.B.  $O(\log(n)) < O(n)$ :

Für jeden Vertreter  $a_n \in O(n)$  mit  $a_n \notin O(\log(n))$  gilt:  $\left| \frac{a_n}{\log(n)} \right|$  ist divergent.

Mit anderen Worten:  $a_n \in O(n)$  wächst stärker als  $c \cdot \log(n) \forall c \in \mathbb{R}$ .



**Übung:** Ordnen Sie den Folgen ein möglichst einfaches und "billiges"  $O(B)$  zu.

	Folge	
(1)	$2n^3 - n^2$	$O(n^3)$
(2)	$7n^5 + 26n^6$	
(3)	$n + 3n^2 - 2n \log(n)$	
(4)	$\frac{n^4 + n^2}{n + 5}$	
(5)	$\frac{n^4 + n^2}{n + 5} - n^3$	



**Übung:** (wird in den Übungen gemacht)  $A_n, B_n, \dots$  seien die Laufzeiten verschiedener Algorithmen. Entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3: Welcher Algorithmus, erster oder zweiter, ist jeweils für große  $n$  schneller?

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$C_n = \frac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50}$	$D_n = \frac{(n+1)!n}{(n-1)!(n+1)^2}$
Fall 3	$E_n = 10n + 10^{-3}n^4$	$F_n = 10n + 2000n^2$

Hinweis: Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter“

### 3.5. Fazit zu Folgen

Wir haben in diesem Kapitel folgende Begriffe kennengelernt:

- Grenzwert: wenn schließlich alle Folgenglieder in einem " $\varepsilon$ -Schlauch" liegen
- konvergente Folge: hat ein endliche Zahl als Grenzwert (Limes)
- divergente Folge: das Gegenteil
- bestimmt-divergente Folge: hat  $+\infty$  oder  $-\infty$  als „Grenzwert“ (uneigentlicher G.)

Wichtige Resultate:

- Mit Grenzwerten kann man rechnen: Operator  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  vertauschbar mit den meisten Grundrechenoperationen.
- Techniken: g.P.i.N., Hauptnenner, ...

Was man sich merken sollte:

- die fundamentalen Nullfolgen aus Satz S 3-3 und
- die fundamentalen bestimmt-divergenten Folgen aus Satz S 3-4.
- die Landau-O-Reihenfolgen aus Satz S 3-7.