Übungsblatt 3 **Funktionen**

Zur Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben sollten Sie auch die Inhalte aus dem Kapitel „VORKURSWISSEN: Funktionen“ durchgearbeitet haben bzw. beherrschen!

Aufgabe 3.0 Definitionsbereiche

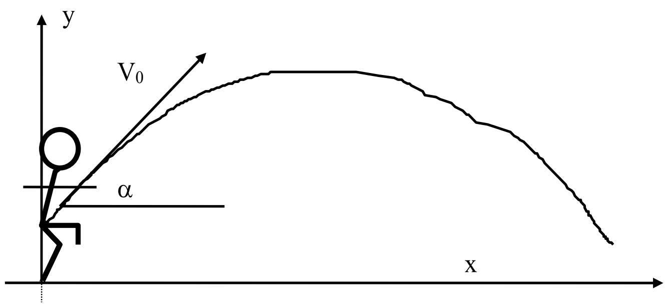
Geben Sie für die nachfolgenden Funktionen die maximalen Definitionsbereiche in **R** an!

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (b) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2-4x}}{\sqrt{2+4x}}$,

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$, (d) $f(x) = \sqrt{x^4-3x^3}$

Aufgabe 3.1 Weitspringer

Ein Weitspringer springt unter einem Absprungwinkel α und einer Absprunggeschwindigkeit v_0 ab. Seine Flugbahn kann bei vernachlässigter Reibung durch (x(t), y(t)) beschrieben werden mit:



$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha,$$

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Man bestimme **Flugdauer T** und **Flugweite W.** Für welchen Winkel α werden Flugdauer bzw. Flugweite maximal? Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Springer unter irdischen Bedingungen (**g = 9.81 m/s²**) abspringen, um bei einem Absprungwinkel von 45° eine Weite von 9m zu erreichen?

Aufgabe 3.2 Schnittpunkte

Bestimmen Sie <u>alle</u> Schnittpunkte der Kurven y_1 und y_2:

$$y_1(x) = 6\cos^2(x), \qquad y_2(x) = 5 - \sin(x)$$

Aufgabe 3.3 Parabelapproximation

Die Sinusfunktion y = sin(x) ist im Intervall $0 \le x \le \pi$ durch eine Parabel zu ersetzen, die mit ihr in den beiden Nullstellen und im Maximum übereinstimmt. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Bereiten Sie die Aufgaben für den 16./17.11.21 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 3.4 Grenzwerte von Funktionen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die gesuchten Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to-1} f(x), \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \quad$ für $\quad f(x) = \dfrac{6x^2+6x}{x^2-x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x), \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \quad$ für $\quad g(x) = \dfrac{(1-\cos(2x))e^{x+2}}{2\sin^2(x)e^{x+3}}$

Hinweis: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Aufgabe 3.5 Grenzwerte von Funktionen 2

Bestimmen Sie über den Satz aus der Vorlesung

Satz S4-1: f hat bei x_0 Grenzwert g $\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)\to x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$

ob die nachfolgenden Grenzwerte existieren und wenn ja, was der Wert für g ist:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-x}{5x^2+3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{x^2+27}{x^2-9}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\cos(x)}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(x)$

[Zusatzfrage: Wieso steht bei (c) im Limes 0+ und nicht einfach 0 ?]

Aufgabe 3.6 Grenzwerte von Funktionen 3

Bestimmen Sie den Grenzwert (oder begründen Sie, warum er nicht existiert):

(a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+5x+1}{x-5}$ (b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x-5}$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ (d) $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{(x+\epsilon)^4-x^4}{\epsilon}$

Aufgabe 3.7 Wie hoch ist der Berg?

Blutrot versinkt die Sonne am Äquator im Meer. Wir sitzen im leise schaukelnden Boot und blicken zurück auf die Küste im Osten, an der sich steil ein mächtiger Berg erhebt. Genau um 18:08 erreicht der Schatten der Dämmerung den Saum der Küste und genau 7 Minuten später, um 18:15, verlöscht der letzte Sonnenstrahl an der Spitze des Berges. Wie hoch ist der Berg? (Erdradius = 6000 km. Wir nehmen hier vereinfachend an, dass die Erdachse nicht gekippt sei.)

Machen Sie sich eine Skizze mit Sonnenstrahlen, Erde und Berg.

Wie ändert sich die Lage, wenn wir uns auf dem 50. Breitengrad befinden?

Bereiten Sie die Aufgaben für den 16./17.11.21 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 3.8 Landausche O-Notation

$A_n, B_n, \ldots$ seien die Laufzeiten verschiedener Algorithmen.

a) Ordnen Sie jeder der Folgen ein möglichst einfaches und "billiges" O(B) zu.
b) Entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3: Welcher Algorithmus, erster oder zweiter, ist jeweils für große n schneller?

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$C_n = \dfrac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50}$	$D_n = \dfrac{(n+1)!\,n}{(n-1)!\,(n+1)^2}$
Fall 3	$E_n = 10n + 10^{-3}n^4$	$F_n = 10n + 2000n^2$

Hinweis zu b): Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter"