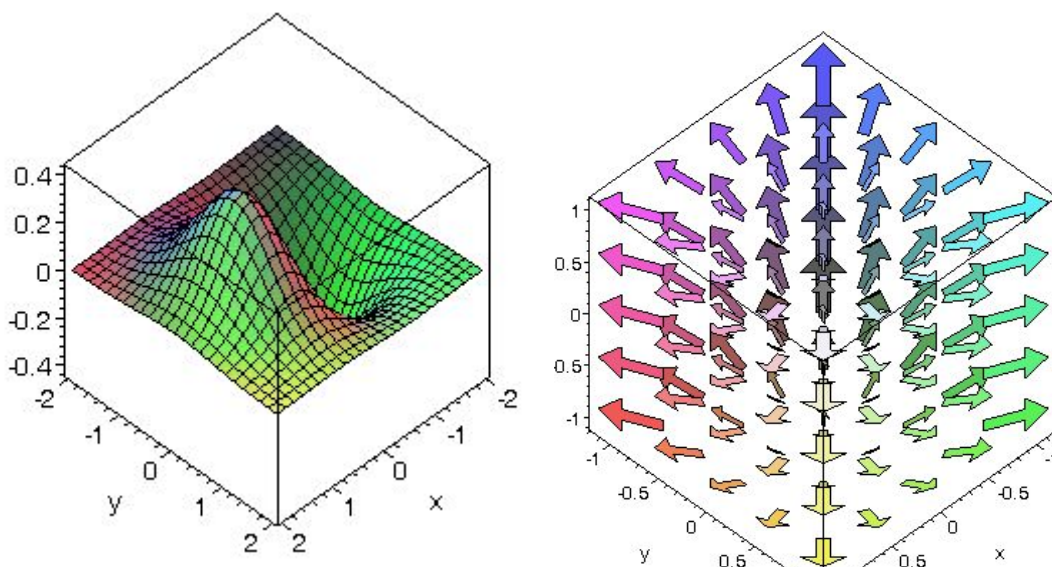
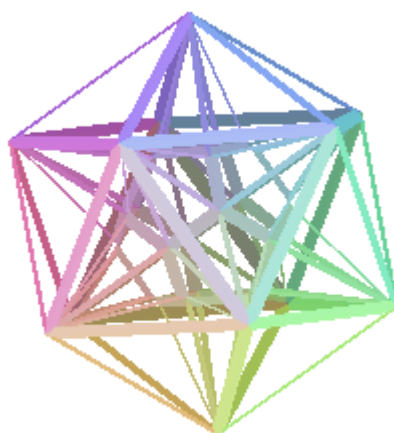


Skript Mathematik 1 WS2023/24



Prof. Dr. Wolfgang Konen
TH Köln, Institut für Informatik



Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	4
0.1	Brauchen Informatiker/innen Mathematik?	4
1	Aussagenlogik und Mengenlehre	5
1.1	Wozu Informatiker Aussagenlogik brauchen	5
1.2	Aussagenlogik	5
1.2.1	Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)	7
1.3	Mengen	8
1.4	Relationen und Abbildungen	9
1.5	Where to go from here	12
2	Zahlssysteme	13
2.1	Natürliche Zahlen	13
2.2	Ganze und rationale Zahlen	16
2.3	Reelle Zahlen	18
2.3.1	Schreibweisen für Zahlmengen und Intervalle	21
2.4	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen reeller Zahlen	21
2.4.1	Spezielle Funktionen	25
2.5	Gleichungen und Ungleichungen	26
2.6	Modulare Arithmetik	29
2.6.1	Prüfziffern	30
2.7	Summenzeichen und Binomialkoeffizient	31
2.7.1	Rechnen mit Summen	31
2.7.2	Fakultät und Binomialkoeffizienten	32
2.7.3	Binomischer Satz	33
2.8	Fazit	34
3.	Zahlenfolgen	35
3.1.	Wozu InformatikerInnen Folgen brauchen	35
3.2.	Definition und Eigenschaften von Folgen	35
3.3.	Grenzwert einer Zahlenfolge	37
3.3.1.	Rechnen mit Grenzwerten	39
3.4.	Anwendungen für Zahlenfolgen	41
3.4.1.	Fixpunkt-Iteration	41
3.4.2.	Landausche $O()$ -Notation	42
3.5.	Fazit zu Folgen	44
4.	Reelle Funktionen	46
4.1.	Warum Informatiker Funktionen brauchen	46
4.2.	Grenzwert einer Funktion	48
4.3.	Stetigkeit einer Funktion	54
4.4.	Fazit	57
5.	Differentialrechnung	58
5.1.	Wozu Informatikerinnen Differentialrechnung brauchen	58
5.2.	Differenzierbarkeit, Ableitung, Differential	58
5.3.	Ableitungsregeln	62
5.4.	Satz von Taylor	68

5.5.	Regeln von de l'Hospital	72
5.6.	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	74
5.6.1.	Monotonie und Krümmungsverhalten	74
5.6.2.	Extremwerte.....	74
5.6.3.	Wendepunkte.....	78
5.7.	Fazit	79
5.7.1.	Kurvendiskussion.....	79
5.7.2.	Wichtige Ergebnisse dieses Kapitels.....	79
6.	Lineare Algebra.....	81
6.1.	Wozu Informatikerinnen Lineare Algebra brauchen.....	81
6.2.	Matrizen	81
6.3.	Rechenregeln für Matrizen.....	84
6.4.	Vektoren.....	87
6.4.1.	Skalar- und Vektorprodukt	90
6.4.2.	Geraden- und Ebenengleichungen.....	92
6.4.3.	Drehungen	94
6.5.	Determinanten	95
6.6.	Lineare Gleichungssysteme.....	100
6.6.1.	Lösbarkeit von Gleichungssystemen	100
6.6.2.	Äquivalente Umformungen und Gauß-Verfahren	103
6.6.3.	Berechnung der Inversen Matrix.....	105
6.6.4.	Anwendungsbeispiel Ausgleichsgerade (Least Square)	107
6.7.	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Basis	108
6.8.	Fazit Lineare Algebra.....	110
7.	Integralrechnung	111
7.1.	Warum Informatiker Integralrechnung brauchen	111
7.2.	Das bestimmte Integral	111
7.3.	Stammfunktion	114
7.4.	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	115
7.5.	Integrationsregeln	117
7.6.	Uneigentliche Integrale	119
7.7.	Geometrische Anwendungen der Integration	121
7.8.	Fazit Integrale	122

0 Einleitung

"Die Wahrheit hat tausend Hindernisse zu überwinden, um unbeschädigt zu Papier zu kommen und von Papier wieder zu Kopf."

[Georg Christoph Lichtenberg, Physiker und Schriftsteller, 1742-1799]

Das Ziel des Rechnens ist Einsicht, nicht Zahlen.

[Richard Hamming, 1915-1998]

0.1 Brauchen Informatiker/innen Mathematik?

Wieviel Mathematik braucht ein Informatiker? Der Spruch hierzu:

„Der Informatiker braucht nur 20% der Mathematik, die er auf der Hochschule lernt - nur man weiß nicht von vornherein, welche 20% des Stoffes das sind“.

Weitere Aspekte :

- Mathematik soll das Lösen von Problemen einüben. Dabei ist der Inhalt der Probleme gar nicht entscheidend.
- Der Informatiker sollte aber die Sprache der Mathematik so weit beherrschen, dass er Fragen mit einem Mathematiker besprechen kann. Dazu muss er dessen Sprache ausreichend beherrschen, wie auch umgekehrt der Mathematiker die Sprache des Informatikers kennen sollte.
- Haben Sie schon einmal erlebt, dass einer durch Zuhören in Konzerten das Klavierspielen lernt? Nein? – Eben, genauso ist es mit Mathematik: Mathematik **lernt** man vor allem durchs **Üben**. Darum ist eine regelmäßige Bearbeitung der Übungsaufgaben wichtig für den Erfolg.
- Mathematik lernt man auch durch **Fragen!** Also: **Fragen Sie viel!** Hierzu eine Anekdote: von [Isaac Rabi](#) (Physik-Nobelpreisträger 1944, für Experimente zur Kernspinresonanz, NMR):

My mother made me a scientist without ever intending to. Every other Jewish mother in Brooklyn would ask her child after school: So? Did you learn anything today? But not my mother. "Izzy," she would say, "did you ask a good question today?" That difference — asking good questions — made me become a scientist.

en.wikiquote.org/wiki/Isidor_Isaac_Rabi

- Keine Anwesenheitspflicht in den Vorlesungen. Trotzdem: In der Mathematik bauen viele Dinge auf einander auf, so dass eine regelmäßige Anwesenheit dem Verständnis durchaus dient.
- Dieses „Skript in Stichworten“ soll weder Lehrbücher noch den Besuch der Vorlesung ersetzen. Vorlesung und Übung bringen viele zusätzliche Beispiele. Das Skript soll Ihnen bei der Nachbereitung des Stoffes als „roter Faden“ dienen.

[adaptiert nach H. Siebert, Skript "Mathe für Ingenieure", FH Gießen, 2003]