

Wdh Zentraler GWS

- "alle Verteilungen streben bei Wdh. Experiment gegen die Normalverteilung"
- etwas präziser: Summe u. Mittelwert von n gleichartig verteilten X_i ist immer normalverteilt mit:

	Erw. wert	Varianz	Std. Abw
X_i	μ	σ^2	σ
$S_n = X_1 + \dots + X_n$	$n\mu$	$n\sigma^2$	$\sqrt{n} \sigma$
$M_n = \frac{S_n}{n}$	μ	$\frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow M_n$ hat konstanten Erw. wert μ
aber immer kleinere Std. Abw

$\Rightarrow M_n$ ist genauer als μ

*) Wieso ist $\text{Var}(M_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2}$?

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

$$\text{Var}(M_n) = E\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{S_n - n\mu}{n}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{(S_n - n\mu)^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2}$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Galton brett

X_i ist zweiwertig = $\begin{cases} 0 & \text{wenn } \bar{A} : \text{links} & (1-p) \\ 1 & \text{wenn } A : \text{rechts} & p \end{cases}$

$$X = \text{Anzahl } A = \sum_{i=1}^n X_i \cong S_n \leftarrow \begin{matrix} \mu = np \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ist standard normalverteilt

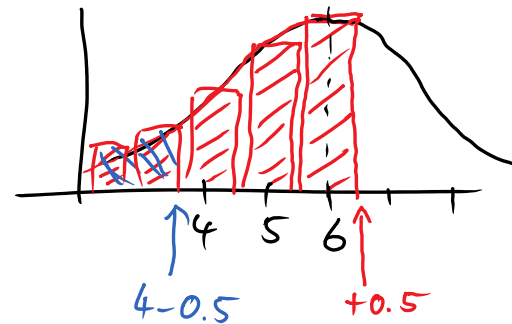
$$\begin{aligned} \Rightarrow P(S_n \leq s) &= P\left(Z_n \leq \frac{s - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{s - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

$z_n + 0.5$:

Bsp $n=12, p=0.5 \Rightarrow \mu = np = 6$

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) &\approx \Phi\left(\frac{6 - 6 + 0.5}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) > \Phi(0) = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 6) &\approx \Phi\left(\frac{6 - 6 + 0.5}{\sigma}\right) \\ &\quad - \Phi\left(\frac{4 - 6 - 0.5}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



Ü Moivre-Laplace

Ü1: Sei $X = \text{Anzahl Jungen}$, $p = 0.52$

$$\Rightarrow np = 520 > 5, \quad n(1-p) = 480 > 5$$

$\Rightarrow$ Vorr. Moivre-Laplace erfüllen

$$P(X < 500) = P(X \leq \underbrace{499}_5) \approx \Phi\left(\frac{499 - 520 + 0.5}{\sqrt{520 \cdot 0.48}}\right)$$

$$= \Phi(-1.2975)$$

$$= 1 - \Phi(1.2975) = \underline{\underline{9.72\%}}$$

Variante $Y = \text{Anzahl Mädchen}$, $p = 0.48$

$$P(Y > 500) = 1 - P(Y \leq \underbrace{500}_5)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{500 - 480 + 0.5}{\sqrt{480 \cdot 0.52}}\right) = 1 - \Phi(1.2975) = \underline{\underline{9.72\%}}$$

Ü2

$$p = 0.4, \quad np = 400 > 5, \quad n(1-p) = 600 > 5 \quad \checkmark$$

$$P(X < 450) = P(X \leq 449) \approx \Phi\left(\frac{449 - 400 + 0.5}{\sqrt{400 \cdot 0.6}}\right)$$

$$= \Phi(3.195) = \underline{\underline{99.93\%}}$$

nahezu sicher, dass 449 nicht überschritten wird.

Komplexe Zahlen

Multiplikation

$$z_1 = a_1 + ib_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2$$

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 + \underbrace{ib_1 ib_2}_{i^2 b_1 b_2} + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{i^2 = -1}{=} \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{\text{Re}(z)} + i \underbrace{(b_1 a_2 + a_1 b_2)}_{\text{Im}(z) = \text{Im}(z_1 z_2)} \end{aligned}$$

Divisions - Beispiel

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-2 + i(2+1)}{1^2 + 1^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

ii) a) $i(3-2i) = 3i - 2i^2 = 3i + 2 = 2 + 3i$

b) $|3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{3+4i}{2-i} &= \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+8i+3i+4i^2}{2^2+1^2} \\ &= \frac{2+11i}{5} \end{aligned}$$