

Komplexe Zahl: $z = x + iy$

Wdh:

Realteil

x

Imaginarteil

y

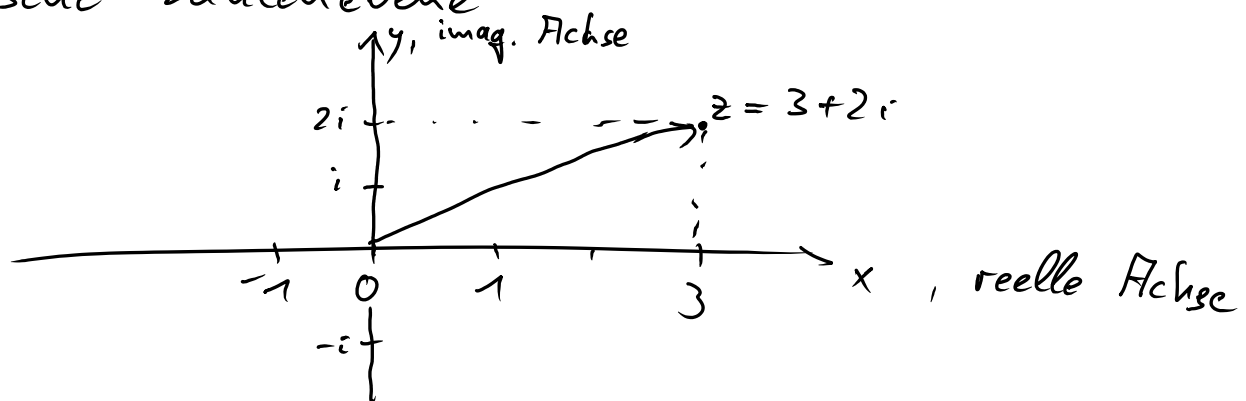
i: imaginäre Einheit $i^2 = -1$ Vektorlänge = Betrag

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

konjugiert-komplexe Zahl

$$z^* = x - iy$$

Gauß'sche Zahlenebene



Begründung für Eulersche Formel

Taylorpolynom (od. Taylorreihe)

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{(i\varphi)^1}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \dots$$

$$= \underline{1} + \underline{i\varphi} - \underline{\frac{\varphi^2}{2!}} - \underline{i\frac{\varphi^3}{3!}} + \underline{\frac{\varphi^4}{4!}} + \underline{i\frac{\varphi^5}{5!}} + \dots$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$i^4 = (-1)(-1) = 1$$

$$\cos(\varphi) = \underline{1} - \underline{\frac{\varphi^2}{2!}} + \underline{\frac{\varphi^4}{4!}} - + \dots$$

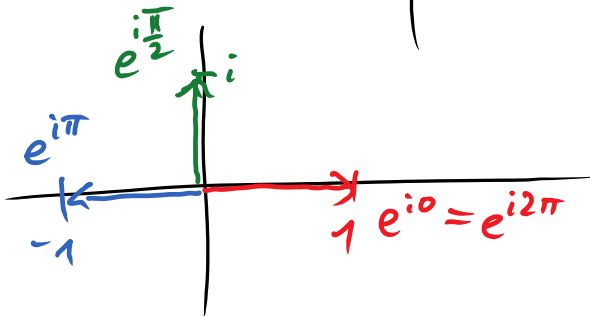
$$i \sin(\varphi) = \underline{i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)}$$

Eulersche Formel

Übung	z	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$	z kartesisch ($\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$)
	e^{i0}	$\cos(0)=1$	$\sin(0)=0$	1
	$e^{i\pi}$	$\cos(\pi)=-1$	$\sin(\pi)=0$	-1
	$e^{i2\pi}$	$\cos(2\pi)=1$	$\sin(2\pi)=0$	+1
	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\cos(\frac{\pi}{2})=0$	$\sin(\frac{\pi}{2})=1$	i

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$



Wieso gilt $\tan \varphi = \frac{y}{x}$?

$$\text{Weil } \frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \tan \varphi.$$

Bsp. Umrechnung

$$z = -2 + 2\sqrt{3}i : \quad x = \operatorname{Re}(z) = -2, \quad y = \operatorname{Im}(z) = +2\sqrt{3}$$

Wg. $x < 0$: 2. od. 3. Quadranten

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi \triangleq 120^\circ$$

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\Rightarrow z = 4 e^{i\frac{2}{3}\pi} = 4 e^{i120^\circ}$$

Ü: $z = 1.5 - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$ Berechne r, φ !

$$\text{Lsg. } r = |z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+27}{4}} = \underline{\underline{3}}$$

Wg. $x > 0, y < 0 \Rightarrow$ 4. Quadr. $\Rightarrow$ kein "+ π "

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{1.5}\right) = -\frac{\pi}{3} \triangleq -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \underline{\underline{\frac{5}{3}\pi}}$$

Polar form, Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Wurzel komplexer Zahlen

$\frac{2k}{n}\pi$: Wie viele Möglichkeiten

$n=5$:

k	0	1	2	3	4	
$\frac{2k}{n}\pi$	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	$5 \equiv 0$
						$\frac{10\pi}{5} = 2\pi$

Nur $k = 0, 1, \dots, n-1$

ergeben unterschiedliche Winkel