V2024-05-27

Montag, 27. Mai 2024 10:55

Orga Ü 8 Komplexe Zahlen
ab Mitte nä Woche oder übernä Woche:
Arne Schmitter V + eine Ü

Wdh Betrag komplexer Zahl
Darstellungsformen — kartesisch $x+iy$
— polar < trig. / exp $re^{i\varphi}$

Gaußsche Zahlenebene
Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$
Potenzieren, Multipl., Division:
einfach in der Polarform (wg $e^{i\varphi}$)

$z = w^n$ n ganze Zahl
$= (Re^{i\alpha})^n = R^n e^{in\alpha}$

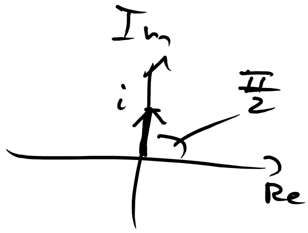
Wurzelziehen $z = w^{\frac{1}{n}}$ (n-te Wurzel)

oder allg $z = w^{\frac{p}{q}}$ ("p hoch" und q-te Wurzel)

Rezept für $w^{\frac{p}{q}}$

1) w in Polarform
2) w^p bilden, dann $+2k\pi$ im Exponent
3) alles im Exponent durch q dividieren
[4) optional: z_i zurück in kartesisch]

Beispiel Was ist $\underbrace{i}_{w}^{\frac{5}{3}}$?



Lsg 1) w in Polarform $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

2) $w^p : z = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\cdot 5 + 2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$

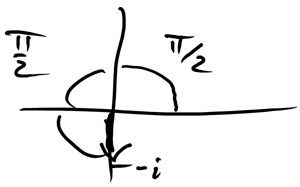
3) $z = e^{i\left(\pi\frac{5}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right)}$, $k = 0, 1, \underset{\overset{\|}{q-1}}{2}$

$\frac{2}{3}k\pi \overset{k=3}{=} \frac{2}{3}3\pi = 2\pi \mathrel{\hat{=}} 0$

$z_0 = e^{i\frac{5}{6}\pi} = -0.866 + 0.5i$

$z_1 = e^{i\frac{9}{6}\pi} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$

$z_2 = e^{i\frac{13}{6}\pi} = e^{i\frac{\pi}{6}} = 0.866 + 0.5i$



$\Uparrow$

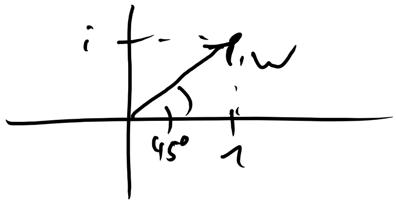
2π abziehen

Ü $\quad z = (\underbrace{1+i}_{w})^{\frac{3}{4}}$

1) w in Polarform: $\quad w = x + iy = 1 + i \quad \Rightarrow \quad x = 1,\ y = 1$

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(1) = 45° = \frac{\pi}{4}$$

$$w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$



$$\begin{aligned} z &= w^{\frac{3}{4}} \\ &= \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{3}{4}} \\ &= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} \left(e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad k = 0,1,2,3 \\ &= 2^{\frac{3}{8}} \left(e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\underbrace{\frac{2k\pi}{4}}_{+k\frac{\pi}{2} \,=\, k\pi\frac{8}{16}}\right)}\right) \end{aligned}$$

d.h.

$$z_0 = 2^{\frac{3}{8}} e^{i\frac{3\pi}{16}}$$

$$z_1 = 2^{\frac{3}{8}} e^{i\frac{11\pi}{16}}$$

$$z_2 = 2^{\frac{3}{8}} e^{i\frac{19\pi}{16}}$$

$$z_3 = 2^{\frac{3}{8}} e^{i\frac{27\pi}{16}}$$

Quadratische Gl. im Komplexen

Beispiel quadratisch Ergänzung

$$z^2 + z = -\frac{10}{4}$$

$$z^2 + 2\cdot\frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{10}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} \qquad \Big| \text{ Wurzelziehen } (\;)^{\frac{1}{2}}$$

$$z + \frac{1}{2} = \pm\, i\,\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{z = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{3}{2}}}$$

Montag, 27. Mai 2024 12:17

Ü $\quad z^2 - (4-2i)z + (5-4i) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2\underbrace{(2-i)}_{b}\underbrace{z}_{a} = -(5-4i) \quad | +b^2$

$\Leftrightarrow z^2 - 2(2-i)z + (2-i)^2 = (2-i)^2 - (5-4i)$

$\Leftrightarrow (z-(2-i))^2 = 4 - 1 \cancel{-2i} \cancel{-2i} - 5 + \cancel{4i}$

$\Leftrightarrow (z-(2-i))^2 = -2 \quad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow z - (2-i) = \pm i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z = 2 - i \pm i\sqrt{2}$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - 2ba + b^2$

$a^2 = z^2$, b ← $(2 - i)$, $a = z$

$(2-i)(2-i)$
$= 2\cdot 2 + (-i)(-i) + 2(-i) + (-i)2$
$= 4 - 1 - 4i$