

Wdh DGL

Typisierung: inhomogen, Ordnung linear, konst Koeff.

einfache DGL lösen durch Integrieren

allgemeine Lösung: variablen Integrationskonstante

Spez. " : alle variablen Konstanten durch Zahlen ersetzt

Homogene lin. DGL mit konst. Koeff

Ansatz $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ist hilfreich

	Lösung	λ	
a) $x''(t) = x(t)$	$e^t, e^{-t}, c_1 e^t + c_2 e^{-t}$	± 1	$\sinh(t)$
b) $x''(t) = \alpha x(t)$	$e^{\sqrt{\alpha}t}, e^{-\sqrt{\alpha}t}, c_1 e^{\sqrt{\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}t}$	$\pm \sqrt{\alpha}$	
c) $x''(t) = -x(t)$	$e^{it}, e^{-it}, c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$	$\pm i$	
d) $x''(t) = -\alpha x(t)$	$e^{i\sqrt{\alpha}t}, e^{-i\sqrt{\alpha}t}, c_1 e^{i\sqrt{\alpha}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\alpha}t}$	$\pm i\sqrt{\alpha}$	

$\alpha \in \mathbb{R}$
 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

zu c) $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ $\left| \oplus \right| \ominus$
 $e^{-it} = \cos(t) - i \sin(t)$

$$e^{it} + e^{-it} = 2 \cos(t)$$

$$e^{it} - e^{-it} = 2i \sin(t)$$

} lösen auch die DGL $x''(t) = -x(t)$

(stecken aber in der Linear kombi. von e^{it}, e^{-it} drin)

Beispiel: radioaktiver Zerfall

$$\text{DGL } \underline{x'(t)} = -0.05 \underline{x(t)}$$

Wie lautet $x(t)$ wenn $x(0) = 4$ gelten soll?

Lsg Ansatz $x(t) = \underline{e^{\lambda t}} \Rightarrow x'(t) = \underline{\lambda e^{\lambda t}}$

in DGL einsetzen

$$\lambda e^{\lambda t} = -0.05 e^{\lambda t}$$

$/ : e^{\lambda t}$, immer > 0

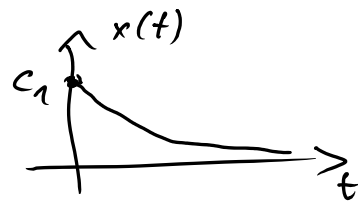
$$\lambda = -0.05$$

S12.3
 $\Rightarrow$ allg Lsg ist $x(t) = c_1 e^{-0.05t}$

$\Rightarrow$ spez. Lsg für $x(0) = 4$

$$x(0) = c_1 e^{-0} \Rightarrow \underline{\underline{c_1 = 4}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_{\text{spez}}(t) = 4 e^{-0.05t}}}$$



Übung 1

$$\text{DGL } x''(t) + 4x(t) = 0$$

$$\text{Lsg a) Ansatz } x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\xRightarrow{\text{in DGL}} \lambda^2 e^{\lambda t} + 4 e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + 4) e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + 4)}_{\text{Polynom in } \lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\stackrel{S_{12-3(2)}}{\Rightarrow} \text{allg Lsg } \underline{x(t) = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{b) allg Lsg in reeller Form: nehme } x_1(t) = e^{2it}$$

$$\stackrel{S_{12-3(3)}}{\Rightarrow} \text{allg reelle Lsg } x(t) = a \operatorname{Re}(e^{2it}) + b \operatorname{Im}(e^{2it})$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) nehme allg. Lsg aus b)}$$

$$x(0) = a \cos(0) + 0 = 0.5 \Rightarrow a = 0.5$$

$$x'(t) = -2a \sin(2t) + 2b \cos(2t)$$

$$x'(0) = 0 + 2b \cos(0) = 0.5 \Rightarrow b = 0.25$$

$$\Rightarrow \text{spez. Lsg ist } \underline{x(t) = 0.5 \cos(2t) + 0.25 \sin(2t)}$$

Übung 2 DGL $x''(t) + 4x'(t) + 404x(t) = 0$

Lsg Ansatz $e^{\lambda t}$ in DGL

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 404 e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda = -404$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2 \cdot 2\lambda + 2^2 = 2^2 - 404$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)^2 = -400 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow \lambda + 2 = \pm 20i$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 20i$$

$$\Rightarrow \text{allg. Lsg} \quad c_1 \underline{e^{(-2+20i)t}} + c_2 e^{(-2-20i)t}$$

$$\begin{aligned} \text{allg Lsg reell: } a \operatorname{Re}(e^{(-2+20i)t}) + b \operatorname{Im}(e^{(-2+20i)t}) \\ = e^{-2t} (a \cos(20t) + b \sin(20t)) \end{aligned}$$

$$z = e^{i\alpha t} = \underbrace{\cos(\alpha t)}_{\operatorname{Re}(e^{i\alpha t})} + i \underbrace{\sin(\alpha t)}_{\operatorname{Im}(e^{i\alpha t})}$$

$$\operatorname{Re}(z) \quad \operatorname{Im}(z)$$