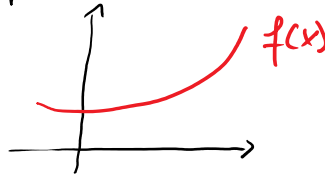


Vorlesung Mathe 2 5.6.24

Mehrdimensionale Differentialrechnung

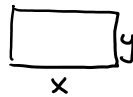
WS: $y = f(x)$



es kommen unabhängige Variablen hinzu : $z = f(x, y)$

↑
↑
unabhängige Variablen

Bp.: Flächeninhalt Rechteck:



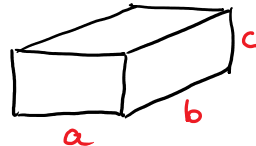
$$f(x, y) = x \cdot y$$



$$V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Wurfparabel $W(\alpha, v_0) = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$
 g Erdbeschleunigung

Bp. für Funktion mit 3 Variablen: Volumen eines Quaders



$$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

Def: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

f heißt Funktion mit n unabhängigen Variablen

$$n=2: f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Schreibweise für $n=2$: $z = f(x, y)$

Darstellungsmöglichkeiten für $n=2$

1) Analytisch $z = f(x, y)$
 oder explizit
 $F(x, y, z) = 0$

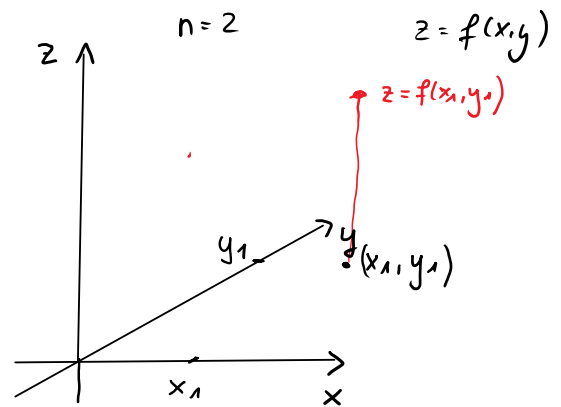
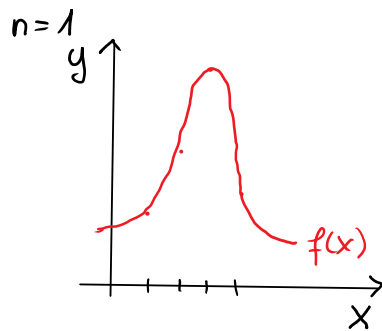
2) Funktionstabelle

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	z_{11}			z_{1m}
x_2	z_{21}			
$\vdots$				
			$\dots$	$\dots$

$$\begin{matrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \left| \begin{matrix} \dots \\ z_{21} \\ \dots \end{matrix} \right. \quad \dots$$

$$z_{nm} = f(x_n, y_m)$$

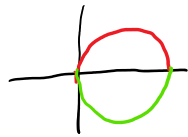
3) Graphische Darstellung



Bem. zu implizit/explicit

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{Kreisgleichung}$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{explizite Darst. des Kreises}$$

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \text{implizite Darst. des Kreises}$$

$$n=1$$

Höhenliniendiagramm

11.0.2024

Schnittkurven parallel zur x,y -Ebene

Bp: $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

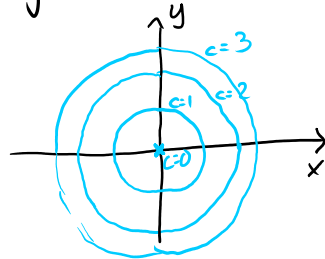
Höhenlinien für z konstant c mit $c = 0, 1, 2, 3$

c	$c = f(x, y) = x^2 + y^2$	
0	$x^2 + y^2 = 0$	Kreis um 0 mit $r = 0$
1	$x^2 + y^2 = 1$	Kreis um 0 mit $r = 1$
2	$x^2 + y^2 = 2$	Kreis um 0 mit $r = \sqrt{2}$
3	$x^2 + y^2 = 3$	Kreis um 0 mit $r = \sqrt{3}$

Kreisgleichung um 0

$$x^2 + y^2 = r^2$$

NB: Kreis um (1,1)
mit $r = 2$
 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$



Schnittkurvendiagramm parallel zur x - z -Ebene: y konstant

$y = c = \text{konstant}$ für $c = 0, 1, 2$

c	$z = f(x, y) = x^2 + c^2$
0	$z = x^2$
1	$z = x^2 + 1$
2	$z = x^2 + 4$

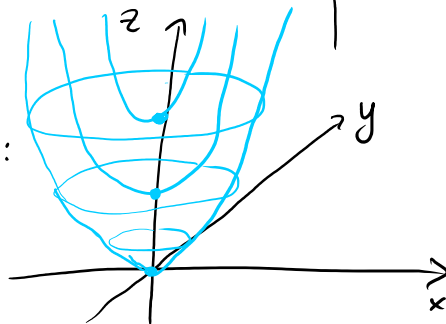


Schnittkurvendiagramm parallel zur y - z -Ebene: x konstant

c	$z = f(x, y) = c^2 + y^2$
0	$z = y^2$
1	$z = y^2 + 1$
2	$z = y^2 + 4$



Gesamtbild:



Rotationsparaboloid