

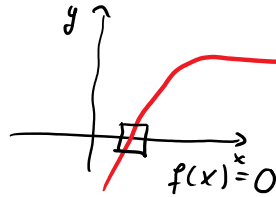
Vorlesung Mathe 2 10.6.2024

Funktionsigenschaften

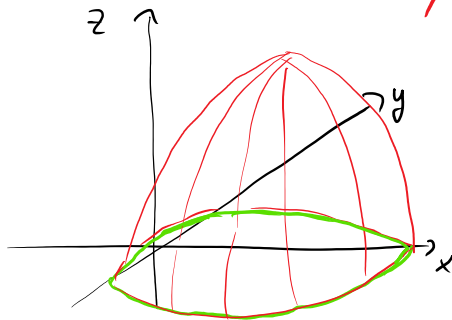
1) Nullstellen

$$y = f(x)$$

(zunächst $n=2$)



$f(x)$



$$z = f(x, y)$$

$$z = f(x, y) = 0$$

Nullstellen sind auf einer Kurve

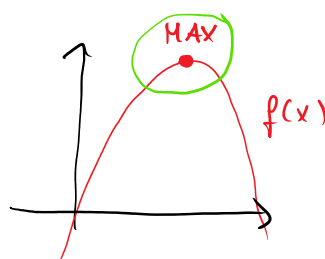
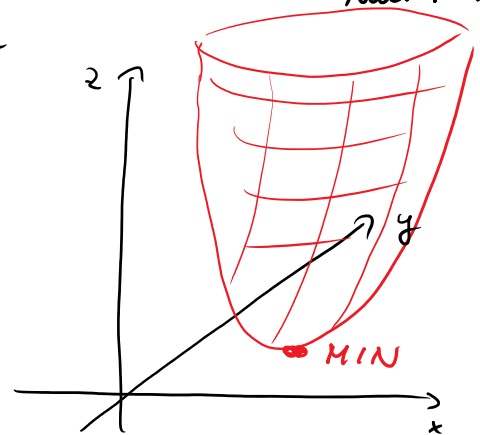
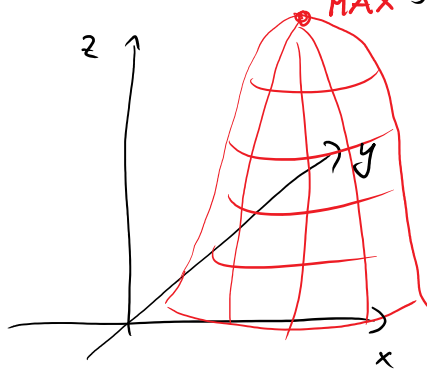
Bp.: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ Halbkugel mit $r=1$

$$\text{Nullstellen: } \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Kreis um } 0 \text{ mit } r=1$$

Schnittkurve in der (x, y) -Ebene

2) Extremwerte



Def: relative (lokale) Extremwerte

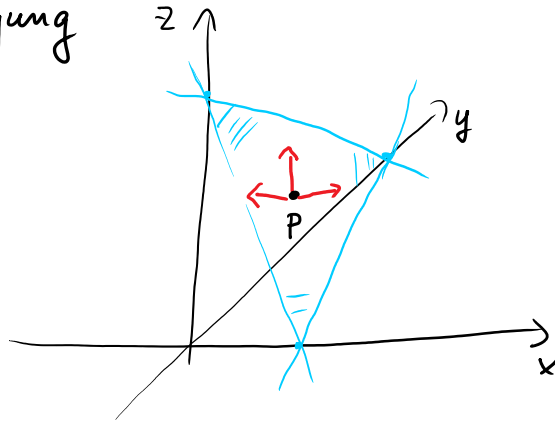
$z = f(x, y)$ besitzt im Punkt (ξ, η)

$\uparrow \quad \uparrow$
 $x_i \quad y_i$

ein Maximum bzw. ein Minimum, wenn für alle Punkte (x, y) einer

ε -Umgebung $U_\varepsilon(\xi, \eta)$ des Punktes (ξ, η) gilt:
 $\uparrow$
 Epsilon Maximum $f(x, y) \leq f(\xi, \eta)$ für alle $(x, y) \in U_\varepsilon(\xi, \eta)$
 Minimum $f(x, y) \geq f(\xi, \eta)$ für alle $(x, y) \in U_\varepsilon(\xi, \eta)$

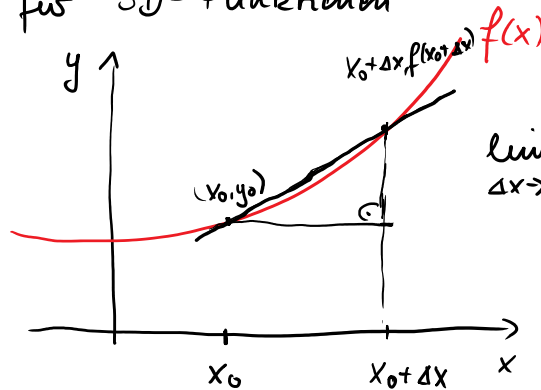
3) Steigung



Steigung im 3D-Raum
 nur mit Angabe einer Richtung
 sinnvoll

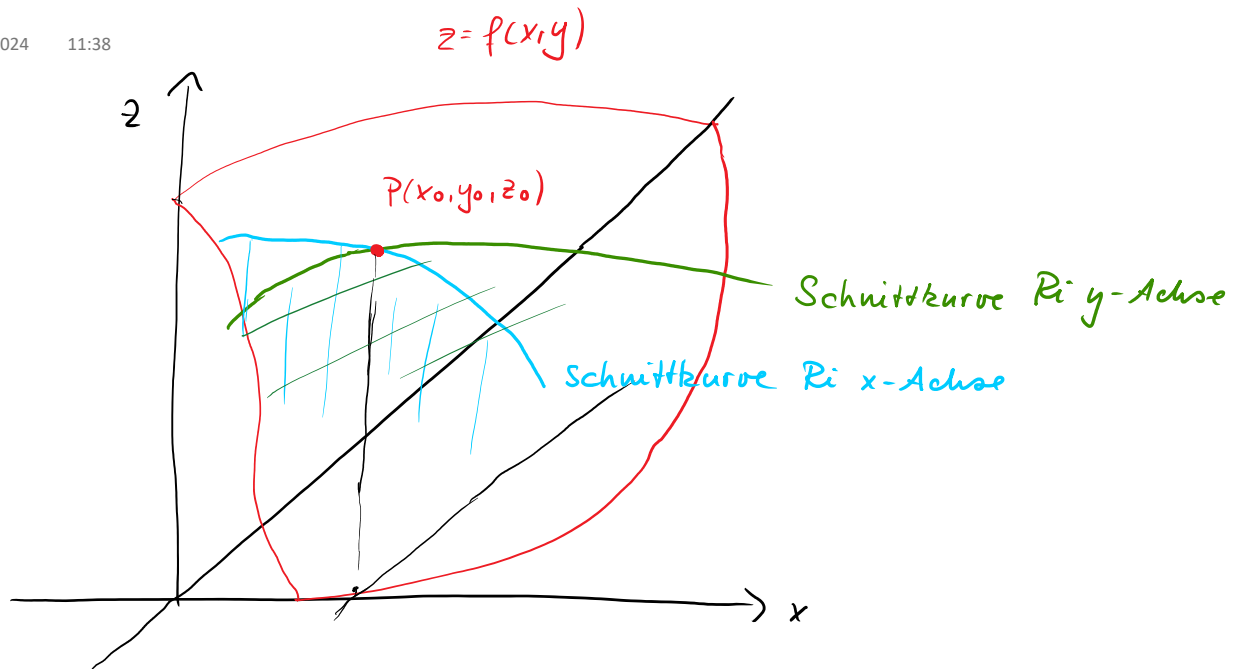
Ableitungen für 3D-Funktionen

Wdh:



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} \right) = f'(x_0)$$

Grenzwert



Angabe der Steigung in $P(x_0, y_0, z_0)$ durch Berechnung der Steigungen der jeweiligen Schnittkurven in x -Achsenrichtung bzw. y -Achsenrichtung.

Im Falle $n=2$ (2 unabh. Variablen) :

Es sind 2 Ableitungen zu berechnen !

Def : Partielle Ableitungen 1. Ordnung für $z = f(x, y)$

a) Die erste partielle Ableitung nach der Variablen x :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Steigung der Schnittkurve in x -Achsenrichtung
y ist wie eine Konstante zu behandeln

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Steigung der Schnittkurve in y -Achsenrichtung
x ist wie eine Konstante zu behandeln

Def: Partielle Ableitung bei Funktionen mit n Variablen

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Frage: Wieviel partielle Ableitungen besitzt eine Fkt. mit n unabh. Variablen?

Antwort: n Ableitungen

Def: Gradient

Fasst man die n partiellen Ableitungen 1. Ordnung zu einem Vektor zusammen, so heißt dieser Gradient von f

$$\text{grad}_f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

3p: 1) $z = f(x, y) = e^{x \cdot y}$ y "konstant"

$$z_x(x, y) = y \cdot e^{x \cdot y}$$

$$z_y(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y} \quad x \text{ "konstant"}$$

$$n=1$$

$$f(x) = e^{20x}$$

$$f'(x) = 20e^{20x}$$

$$f''(x) = 20 \cdot 20 \cdot e^{20x}$$

2) $z = f(x, y) = x^n \cdot y^m$

$$z_x(x, y) = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m = n \cdot y^m \cdot x^{n-1}$$

$$z_y(x, y) = x^n \cdot m \cdot y^{m-1}$$

3) $z = f(x, y) = x \cdot \ln y$

$$z_x = \ln y$$

$$z_y = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

$$\text{grad}_f = \begin{pmatrix} \ln y \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

$$\text{grad}_f(1, 1) = \begin{pmatrix} \ln 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Achtung:
falsche
Schreibweise

z'_x

4) $z = f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$

$$z_x(x, y) = \cos x \cdot \cos y$$

$$z_y(x, y) = \sin x \cdot (-\sin y) = -\sin x \cdot \sin y$$

5) Geg: $z = f(x, y) = 2xy - 3x^2 + \frac{1}{y}$

Gesucht: Steigungen in Richtung x -Achse und in Richtung y -Achse
im Punkt $(2, 1)$ der Definitionsebene

$$z_x = 2y - 6x$$

$$z_y = 2x - \frac{1}{y^2}$$

$$\text{grad}_f(2, 1) = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6) $z = f(x, y) = \underbrace{4x^2}_u \cdot \underbrace{\sin x \cdot \cos y}_v$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$z_x = \underbrace{8x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x \cdot \cos y}_v + \underbrace{4x^2}_u \cdot \underbrace{\cos x \cdot \cos y}_{v'} \quad \text{Produktregel}$$

$$z_y = 4x^2 \cdot \sin x \cdot (-\sin y) = -4x^2 \cdot \sin x \cdot \sin y \quad \text{keine Abl. regel}$$