

Vorlesung Mathe 2 12.6.2024

Bp. Partielle Abl. 1. Ordnung (Ableitungsregeln ggf erforderlich)

$$1) \quad z = f(x, y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$z_x = 2x \cdot y \cdot e^{x^2+y^2} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$z_y = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$= e^{x^2+y^2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$= e^{x^2+y^2} (1 + 2y^2)$$

$$\text{NR} \quad z = y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$u = y \quad u' = 1$$

$$v = e^{x^2+y^2} \quad v' = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$z_y = u'v + uv' = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

Kettenregel und Produktregel

$$2) \quad u(x, y, z) = 2x \cdot e^{y^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$u_x = 2e^{y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = 2e^{y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y = 2xy \cdot e^{y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{Kettenregel}$$

$$u_z = 2xz \cdot e^{y^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{Kettenregel}$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{ÜA: } z = f(x, y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$$

für zu Hause! Bestimmen Sie die Werte der Gradienten für (0,2) und (1,-6)

3) $z = f(x,y) = \frac{e^x \cdot \sin y}{e^y \cos x}$ Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = e^x \sin y \quad u' = e^x \sin y$$

$$v = e^y \cos x \quad v' = -e^y \sin x$$

$$z_x(x,y) = \frac{e^x \sin y \cdot e^y \cos x - e^x \sin y \cdot (-e^y \sin x)}{(e^y \cos x)^2}$$

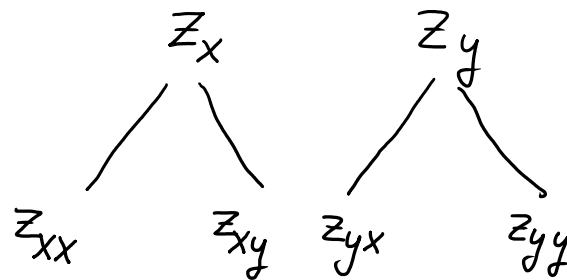
$$z_y(x,y) = \frac{e^x \cos y \cdot e^y \cos x - e^x \sin y \cdot e^y \cos x}{(e^y \cos x)^2}$$

$$u = e^x \sin y \quad u' = e^x \cos y$$

$$v = e^y \cos x \quad v' = e^y \cos x$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

$$z = f(x,y)$$



2 partielle Abl.
1. Ordnung

4 partielle Abl.
2. Ordnung

$$z_{xx}$$

$$z_{yy}$$

direkte Ableitungen

$$z_{xy}$$

$$z_{yx}$$

gemischte Ableitungen

Frage: Geg: $z = f(x,y)$

Wieviel partielle Abl. 3. Ordnung gibt es?

8 Stück, da jede der 4 wieder nach x bzw. y abgeleitet werden kann.

Frage: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Anzahl part. Abl. 2. Ordnung?

n^2 Stück

Anzahl part. Abl. m -ter Ordnung n^m Stück

Schreibweise: Hier z_{xx} bzw. f_{xx} etc

$$\text{Bp: } \boxed{f_{xyz}(x, y, z)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

wird hier verwendet

Satz von Schwarz

Ist $z = f(x_1, \dots, x_n)$ m -mal stetig differenzierbar,
so sind die gemischten partiellen Ableitungen m -ter Ordnung
unabhängig von der Reihenfolge des Differenzierens alle gleich.

$$\text{Bp: } z = f(x, y) = x^2 y + 2x^5 y$$

$$z_x = 2xy + 10x^4 y \quad z_{xy} = 2x + 10x^4$$

$$z_y = x^2 + 2x^5 \quad z_{yx} = 2x + 10x^4$$

Def:

 $z = f(x_1, \dots, x_n)$ sei zweimal partiell stetig differenzierbar

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \dots & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Hesse'sche Matrix
Jacobi'sche Matrix
Funktional Matrix

Satz von Schwarz $\Rightarrow H(x)$ ist symmetrisch

Bp: $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 \cdot x_3 + x_3$

Stellen Sie die Hesse-Matrix auf für $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1$
erst allgemein, dann für die vorgegebenen Werte

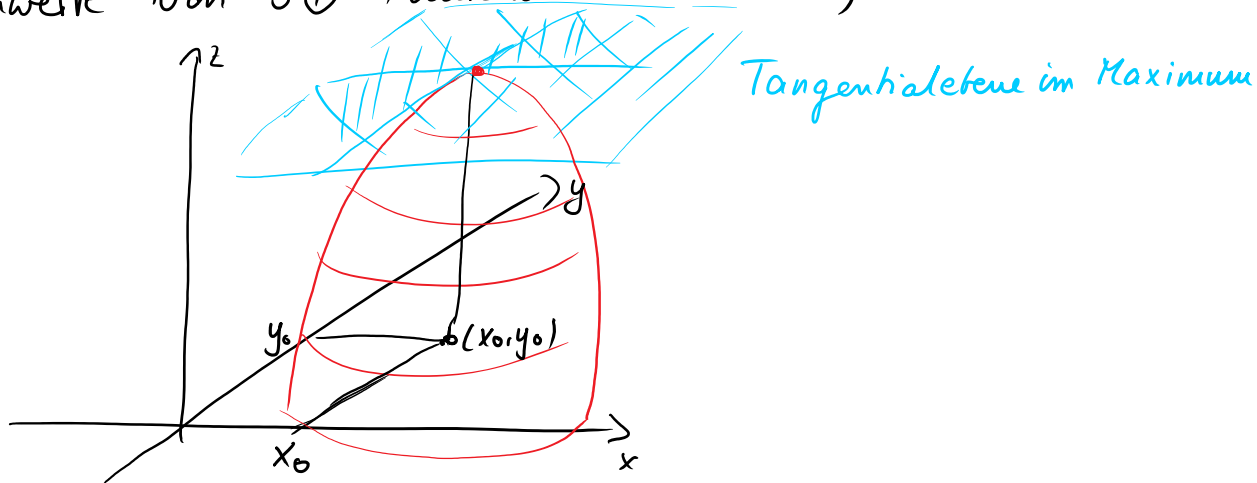
$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} \end{pmatrix}$$

$$H(1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

NB: $z_{x_2} = 2x_2 \cdot x_3$

$z_{x_2 x_2} = 2x_3$

Extremwerte von 3D-Funktionen ($n=2$)



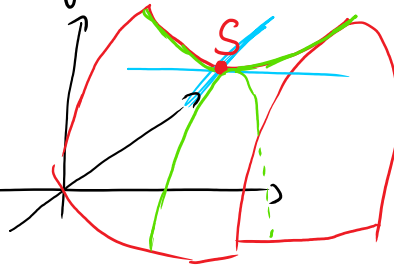
notwendige Bedingung : $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$
für Kandidat (x_0, y_0)

$$\text{grad}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"Sämtliche partielle Ableitungen verschwinden" ($= 0$)

Aber: Auch bei Sattelpunkten

verschwinden die
partiellen Ableitungen
1. Ordnung



hinreichende Bedingungen:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{yx} \\ = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

$\Delta(x_0, y_0) > 0$ Extremwert vorhanden

$f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{Max}$

$f_{xx} > 0 \Rightarrow \text{Min}$

$\Delta(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$

$\Delta(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \text{keine Entscheidung möglich}$