

Vorlesung Mathe 2 17.6.2024

geg: $z = f(x_1, \dots, x_n)$ Fkt. mit n unabh. Variablen

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ist Extremwert

$\Leftrightarrow$ 1) $\text{grad}_f(\bar{x}) = 0$
2) Sei $H(\bar{x})$ die Hesse'sche Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ f_{x_2 x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_i}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_i x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_i x_i}(\bar{x}) \end{vmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

die Hauptunterdeterminanten

Dann gilt: $\bar{x}$ lokales Maximum $\Leftrightarrow H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots$

d.h. $H_n \begin{cases} < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

$\bar{x}$ lokales Minimum $\Leftrightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots, H_n > 0$

Bp: $f(x, y) = x^3 - 12x \cdot y + 6y^2$

Bestimmen Sie die Extremwerte mit Nachweis, um welche Art von Extremwert es sich handelt.

Auswertung der notwendigen Bedingungen:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 12y = 0 \quad \text{I}$$

$$f_y(x, y) = -12x + 12y = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{Aus I: } 3x^2 = 12y$$

$$\text{Aus II: } 12x = 12y \Rightarrow x = y$$

$$* \text{ in I: } 3x^2 = 12x$$

$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 3x^2 - 12x = 0$$

$$x(3x - 12) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ 3x - 12 = 0 \\ x_1 = 0 \quad 3x = 12 \end{array}$$

$(0, 0)$ bzw. $(4, 4)$ Kandidaten

(0,0) bzw. (4,4) Kandidaten

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & 3x - 12 &= 0 \\ & & 3x &= 12 \\ & & x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$f_{xx}(x,y) = 6x$$

$$f_{yy}(x,y) = 12$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -12$$

$$\Delta(0,0) = 6 \cdot 0 \cdot 12 - (-12)^2 = -144 \quad \text{d.h. Sattelpunkt bei } (0,0)$$

$$\Delta(4,4) = 6 \cdot 4 \cdot 12 - (-12)^2 = 144 > 0, \quad \text{d.h. Extremwert bei } (4,4)$$

$$f_{xx}(4,4) = 6 \cdot 4 = 24 > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } (4,4)$$

$$\text{Bsp: } f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 x_3 - x_3^2 + 3x_3$$

$$\text{Notw. Bed.: } f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} = 0 \quad \text{I}$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{II}$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \quad \text{III}$$

$$\text{Aus I: } 3x_1^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_{11} = 1 \quad x_{12} = -1$$

$$\text{Aus II und III: } -3x_3 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$* \text{ in II: } -2x_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 2x_2 \Rightarrow x_2 = 1$$

Kandidaten: (1, 1, 2) und (-1, 1, 2)

$$\begin{pmatrix} 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} & (3x_1^2 - 3)^2 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} & 0 \\ f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ 0 & -2 & 1 \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ 0 & 1 & -2 \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} \end{pmatrix}$$

Kandidat 1:

$$H_3(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entwicklung nach 1. Zeile}}{=} 6e^{-2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6e^{-2} (4 - 1) = 18e^{-2} > 0$$

1. Zeile > 0

$$H_2(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12e^{-2} - 0 = -12e^{-2} < 0$$

$$H_1(1, 1, 2) = |6e^{-2}| = 6e^{-2} > 0$$

$H_1 > 0$, $H_2 < 0$, $H_3 > 0$ → keine Aussage über die Art des Extremwertes möglich

Kandidat 2:

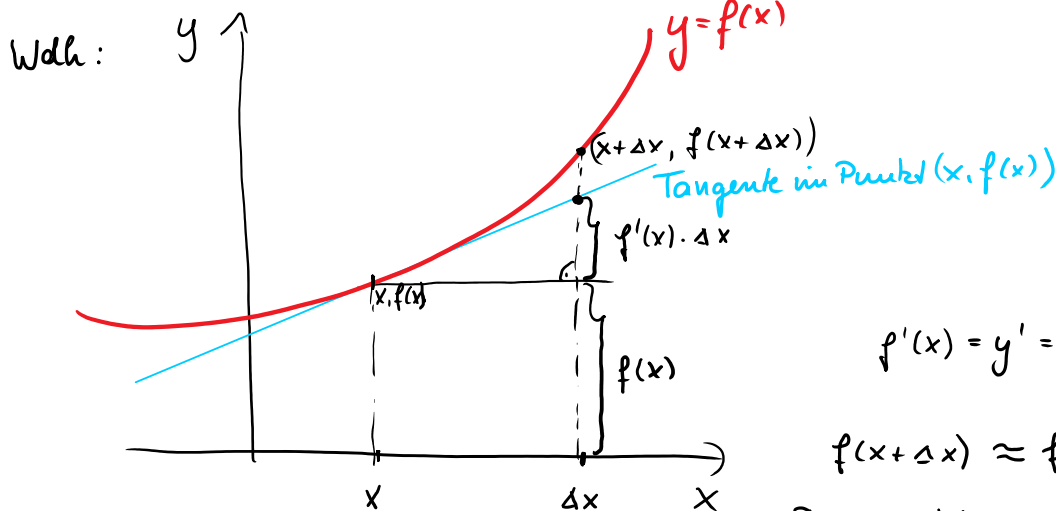
$$H_3(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Entw. nach} \\ \text{1. Zeile}}}{=} -6e^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6e^2 \cdot 3 = -18e^2 < 0$$

$$H_2(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12e^2 > 0$$

$$H_1(-1, 1, 2) = |-6e^2| = -6e^2 < 0$$

$H_1 < 0$, $H_2 > 0$, $H_3 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

Partielle und totales Differential



$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Der Funktionswert $f(x + \Delta x)$ wird durch den zugehörigen Wert auf der Tangente in $(x, f(x))$ ersetzt.

Linearisierung der Funktion

$$df = f'(x) \cdot dx$$

heißt das Differential der Fkt. $y = f(x)$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} \text{ Differentialquotient}$$

Im 3D-Raum: $dz_x = f_x dx$

und $dz_y = f_y dy$

partielle Differentiale (auf die Schnittkurve bezogen)

für $n > 2$: $dx_i f = f_{x_i} dx_i$

Das totale Differential einer mehrdim. Funktion

$$n=2$$

Frage: Wie ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn statt des Wertes auf der Fläche der Wert auf der Tangentialebene genommen wird?

Vorüberlegungen:

$y = f(x)$ $(x_0, f(x_0))$ Die Tangentengleichung lautet:

$$y = mx + b$$

$$y' = f'(x_0) = m$$

Also: $y_0 = m x_0 + b \Rightarrow b = y_0 - m x_0 = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$

$$y = f'(x_0) x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_m \quad \quad \underbrace{\quad}_b \\ \Rightarrow y - y_0 &= f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 \\ y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Gleichung einer Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = ax + by + c$$

$z = f(x, y)$
Funktionsfläche

Im Berührungspunkt gilt: $z_x = a = f_x(x_0, y_0)$
(liegt auch auf
Tangentialebene)

$$z_y = b = f_y(x_0, y_0)$$

$$\text{Also gilt: } z_0 = ax_0 + by_0 + c \Rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0$$

$$\Rightarrow c = z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$$

$$z = f_x(x_0, y_0) \cdot x + f_y(x_0, y_0) \cdot y + z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$$

$$\text{Umformen: } z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\text{oder } z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

Die Änderung der Höhenkoordinate annähernd (Punkt auf Tangentialebene
statt auf Fkt. fläche)

$$\text{ist dann } dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy \quad \text{mit } z - z_0 = dz$$