# Vorlesung Mathe 2 19.6.24

Das totale Differenzial eines Funktion $z = f(x,y)$

$$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

lineares Differenzialausdruck

Das totale Differenzial von $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ $x = (x_1 \ldots x_n)$ n-Tupel

$$dz = f_{x_1}(x)\,dx_1 + f_{x_2}(x)\,dx_2 + \ldots + f_{x_n}(x)\,dx_n$$

lineares Differenzialausdruck
(= Summe aus partiellen Differenzialen)

Beispiele:

1) $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

Stellen Sie die Formel für das totale Differenzial auf

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot dy$$ totale Differenzial

geg: P (2,1) in der Definitionsebene
wird verschoben nach $P^*(2{,}5\,;\,1.75)$

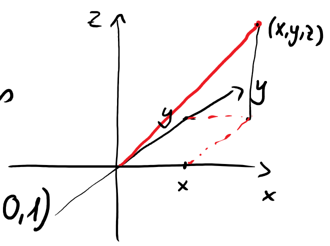
$dx = 2.5 - 2 = 0.5$
$dy = 1.75 - 1 = 0.75$

$$dz = \frac{2\cdot 2}{2^2+1^2}\cdot 0.5 + \frac{2\cdot 1}{2^2+1^2}\cdot 0.75 = 0.7$$

$$\Delta z = |f(2;1) - f(2{,}5\,;\,1{,}75)| = |\ln(4+1) - \ln(2{,}5^2+1.75^2)|$$
$$= |1{,}609 - 2{,}2314| = |-0{,}62|$$
$$= 0{,}62$$

2) $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Abstand eines 3-D-Punktes zum Ursprung




Frage: $P(1,2,0) \longrightarrow P^*(0{,}9;\ 2{,}2;\ -0{,}1)$

$$dr = r_x(x,y,z)\cdot dx + r_y(x,y,z)\cdot dy + r_z(x,y,z)\,dz$$

$dx = -0{,}1 \quad dy = 0{,}2 \quad dz = -0.1$

$$r_x(x,y,z) = \frac{2x}{2\sqrt{\ldots}} = \frac{x}{\sqrt{\ldots}}$$

$$r_x(x,y,z) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_y(x,y,z) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_z(x,y,z) = \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_x(1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad r_z = \frac{2\cdot 0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

$$r_y(1,2,0) = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$dr = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-0{,}1) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0{,}2 + 0 \cdot (-0{,}1)$$

$$\approx \boxed{0{,}1342}$$

$$\Delta r = \left| r(1,2,0) - r(0{,}9;\ 2{,}2;\ -0{,}1) \right|$$

$$= \left| \sqrt{5} - \sqrt{5{,}66} \right| = \boxed{0.143}$$

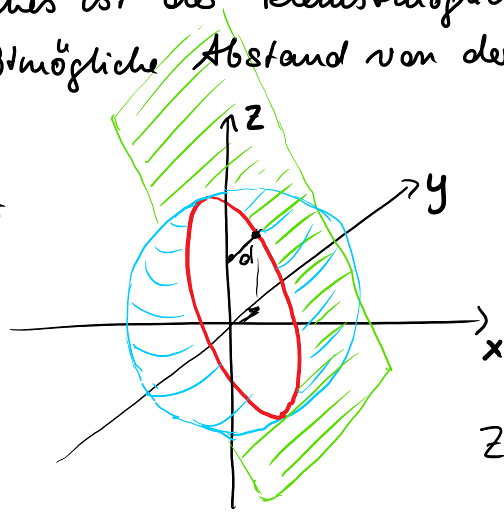
# Extremwerte mit Nebenbedingungen

Erinnerung WS: Dosenproblem war schon eine Extremwertberechnung (minimale Oberfläche) unter einer Nebenbedingung (Volumen vorgegeben)

Bp: Ein Punkt P bewege sich auf der Ebene $x+y+z=0$, der Abstand des Punktes P vom Ursprung im 3D-Raum sei 1, d.h. P bewegt sich auch auf der Kugel um 0 mit $r=1$

Frage: Welches ist der kleinstmögliche und welches ist der größtmögliche Abstand von der z-Achse?

d: Abstand zur z-Achse

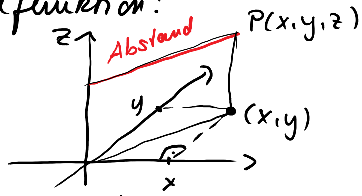



$x^2+y^2+z^2=1$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-1=0$
$x+y+z=0$

] implizite Darstellung (=0)

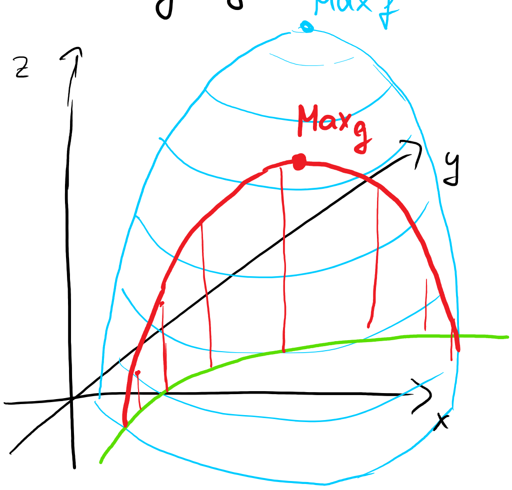
Nebenbedingungen

Zielfunktion:




$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

Extremwertaufgabe mit 3 unabh. Variablen und 2 Nebedingungen




$g(x,y)=0$ Nebenbedingung Restriktion

liegt in der x-y-Ebene
Entscheidungsraum
schränkt den Def.bereich ein

2 Lösungsansätze

1) Variablensubstitution nur für 3D-Funktionen ($n=2$)

Falls die Nebenbed. nach einer der beiden Variablen aufgelöst werden kann, setzt man diese Substitutionsgleichung in die

Zielfunktion ein, dann hat man nur noch eine Variable.

2) Die Methode von Lagrange, Multiplikatorenregel von Lagrange (1736-1813)

am Bp: $z = f(x,y)$ und $g(x,y) = 0$

Man bildet: $\underbrace{L(x,y,\lambda)}_{\text{Lagrange-Fkt.}} = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$

Die Extremwerte von $f(x,y)$ unter der Nebenb. $g(x,y)=0$ liegen dort, wo $L(x,y,\lambda)$ ihre Extremwerte hat.