Montag, 24. Juni 2024 10:33

Vorlesung Mathe 2 24.6.24

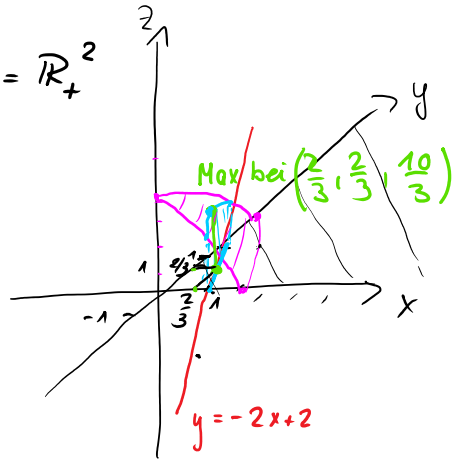
Extremwerte mit Nebenbedingungen

1) Lösung durch Variablensubstitution

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4$ $\quad D = \mathbb{R}_+^2$

NB: $g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$

Auflösen nach y: $\star$ $y = -2x + 2$



$\star$ eingesetzt in die Funktionsgleichung

$$z = -x^2 - \frac{1}{2}(-2x+2)^2 + 4$$

$$z = -x^2 - \frac{1}{2}(4x^2 - 8x + 4) + 4$$

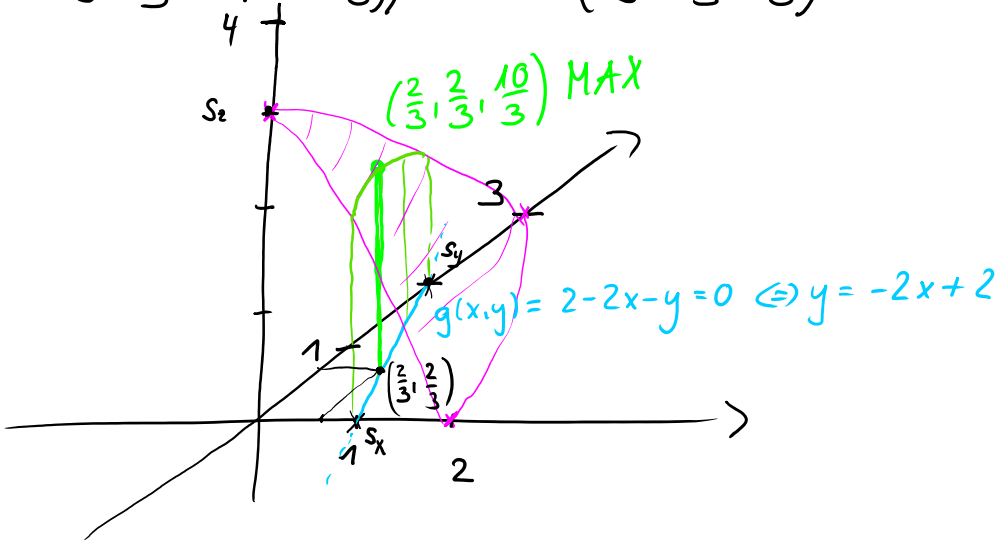
$$= -x^2 - 2x^2 + 4x - 2 + 4 = -3x^2 + 4x + 2$$

$z = -3x^2 + 4x + 2$ Notwendige Bed: $z' = -6x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4 = 6x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Hinreichende Bed: $z'' = -6$ $\quad x = \frac{2}{3}$ in $\star$: $y = -2 \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3}$

Max. bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ also $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$



2) Methode von Lagrange

Geg. $z = f(x,y)$ mit NB $g(x,y) = 0$

(implizite Form)

Geg. $z = f(x,y)$ mit NB $g(x,y) = 0$
(implizite Form)

Für $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$ werden die lokalen Extremwerte bestimmt

Durch diese Methode wird die Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen auf die uneingeschränkte Extremwertbestimmung zurückgeführt, allerdings mit einer Variablen mehr (λ = Lagrange-Multipl.)

Vorgehen: Über Notw. Bed.

$$L_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0$$
$$L_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0$$
$$L_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0$$

werden Kandidaten ermittelt

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \quad D = \mathbb{R}_+^2$

$$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$$

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + \lambda(2 - 2x - y)$$
$$+ 2\lambda - 2\lambda x - \lambda y$$

$$L_x(x,y,\lambda) = -2x - 2\lambda = 0 \quad \text{I}$$
$$L_y(x,y,\lambda) = -y - \lambda = 0 \quad \text{II}$$
$$L_\lambda(x,y,\lambda) = 2 - 2x - y = 0 \quad \text{III}$$

Aus I: $-2x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -x$
Aus II: $-y = \lambda$
$\Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$ *

* in III: $2 - 2x - x = 0 \Rightarrow 2 - 3x = 0 \Rightarrow 2 = 3x$
$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$

mit $x = y$ ist $y = \frac{2}{3}$

Kandidat liegt in D bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

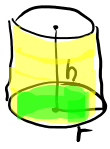
Die hinreichenden Bedingungen werden später kurz formuliert, kommen aber nicht in der Klausur dran

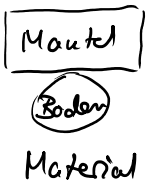
Bp: Dosenproblem

Oben offene Dosen mit Radius r und Höhe h

Gesucht: Abmessungen von Dosen mit V = 1 Liter und minimaler Oberfläche

Methode: Lagrange





Material

Zielfunktion: $2\pi r \cdot h + \pi \cdot r^2$
Mantel

Nebenbedingung (Volumen = 1 Liter): $g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000\ cm^3$

$g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$

$L(r,h,\lambda) = 2\pi \cdot r \cdot h + \pi r^2 + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$

$L_r(r,h,\lambda) = 2\pi h + 2\pi r + 2\lambda\pi r h = 0$ I

$L_h(r,h,\lambda) = 2\pi r + \pi\lambda r^2 = 0$ II

$L_\lambda(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$ III

Aus II: $\pi \lambda r^2 = -2\pi r \mid : \pi r^2$

$\lambda = -\frac{2}{r}$ *

Aus I mit *: $2\pi h + 2\pi r + 2 \cdot \left(-\frac{2}{r}\right) \cdot \pi \cdot r \cdot h = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi h + 2\pi r - \frac{4}{r}\pi \cdot r \cdot h = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi h + 2\pi r - 4\pi h = 0$

$\Leftrightarrow -2\pi h + 2\pi r = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r = 2\pi h$

$\Leftrightarrow r = h$ **

** in III: $\pi \cdot r^2 \cdot r - 1000 = 0 \Leftrightarrow \pi \cdot r^3 = 1000 \Rightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabh. Variablen und k Nebenbedingungen

$z = f(x_1, \dots x_n)$ Zielfunktion mit n unabh. Variablen

$g_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ k Nebenbedingungen $j = 1, \dots k$

$\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_k)$ $x = (x_1, \dots x_n)$

k Lagrange-Multiplikatoren (für jede NB einer)

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x)$$

$$\Leftrightarrow L(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_k) = f(x_1, \dots x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x_1, \dots x_n)$$

n+k Variablen

Notwendige Bed.: $L_{x_i}(x_1, \dots x_n) = 0 \quad (i = 1, \dots n)$

$L_{\lambda_j}(x_1, \dots x_n) = 0 \quad (j = 1, \dots k)$

das sind genau die k Nebenbedingungen

Hinreichende Bedingungen für n Variablen und einer NB (kein Klausurwissen)

$f(x_1, \dots x_n)$

$g(x_1, \dots x_n) = 0$ $\quad L(x_1, \dots x_n, \lambda) = f(x_1, \dots x_n) + \lambda g(x_1, \dots x_n)$

Bilde $G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} & L_{\lambda x_1} \\ L_{x_2x_1} & & & & \\ \vdots & & & & \\ L_{x_nx_1} & - & - & - & L_{\lambda x_n} \\ g_{x_1} & - & - & - & 0 \end{vmatrix}$

$\vdots$

$G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & g_{x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix}$

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*)$ ist lokales Maximum, falls

$$G_2 > 0,\ G_3 < 0,\ \dots\ G_n \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

X^* ist lokales Minimum, falls

$$G_2 < 0,\ G_3 < 0,\ \dots G_n < 0 \quad \text{für alle } n$$

$G_2, G_3, \dots G_n$ Determinanten

vergleichbar mit Hauptunterdeterminanten H_i