Vorlesung Mathematik 2 26.6.24

Die Methode von Lagrange

$$L(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_k) = f(x_1, \dots x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, g_j(x_1, \dots x_n)$$

$n+k$ Variablen

Kandidaten: Auswertung der notwendigen Bedingungen

$$L_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, \dots n)$$

$$L_{\lambda_j} = 0 \qquad (j = 1, \dots k)$$

das sind genau die Nebenbedingungen in der impliziten Form

Extremwerte: Auswertung der hinreichenden Bed. (s. Vorl. v. 24.6.24)

Beispiel:

$$f(x,y,z) = \ln(2x) + 2\ln y + 4\ln z$$

$$g(x,y,z) = x + y + 2z - 7 = 0$$

$$L(x,y,z,\lambda) = \ln(2x) + 2\ln y + 4\ln z + \lambda(x + y + 2z - 7)$$

Notwendige Bedingungen:

$$\text{I} \quad L_x(x,y,z,\lambda) = \frac{1}{2x} \cdot 2 + \lambda = \frac{1}{x} + \lambda = 0$$

$$\text{II} \quad L_y(x,y,z,\lambda) = \frac{2}{y} + \lambda = 0$$

$$\text{III} \quad L_z(x,y,z,\lambda) = \frac{4}{z} + 2\lambda = 0$$

$$\text{IV} \quad L_\lambda(x,y,z,\lambda) = x + y + 2z - 7 = 0$$

Aus I: $\lambda = -\frac{1}{x}$ (**)

Aus II: $\lambda = -\frac{2}{y}$

$\Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{2}{y} \Rightarrow -y = -2x \Rightarrow y = 2x$ (*)

Aus III: $\frac{4}{z} + 2\lambda = 0 \Rightarrow 4 + 2\lambda z = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{\lambda} \underset{(**)}{\Rightarrow} z = -\frac{2}{\left(-\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow z = 2x$ (***)

(*), (**), (***) in IV: $x + 2x + 4x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 7x = 7 \Leftrightarrow x = 1$

Kandidat: $x = 1, \; y = 2, \; z = 2$

$$G_3 = \begin{vmatrix} -x^{-2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2y^{-2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4z^{-2} & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$G_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Entwicklung nach Zeile 1}}{=} -\frac{7}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$ Entwicklung nach Zeile 1

$$G_2 = \begin{vmatrix} -x^{-2} & 0 & 1 \\ 0 & -2y^{-2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad G_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

Entw. nach Zeile 1

$G_3 < 0 \quad G_2 > 0 \implies$ lokales Maximum bei $x = 1, y = 2, z = 2$

Vorl. 24.6.

Eingangsbeispiel:

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ Abstand des 3D-Punktes von der z-Achse

NB: $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$

$g_2(x,y,z) = x+y+z = 0$

Kandidaten: $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+z)$

$L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ I

$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ II

$L_z = 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0$ III

$L_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ IV

$L_{\lambda_2} = x+y+z = 0$ V

Aus I: $\lambda_2 = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x\right)$

Aus II $\lambda_2 = -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y\right)$

Entweder $x = y$

oder $\lambda_2 = 0$

Fall 1: $x = y$ *

* in V: $2x + z = 0$

$\implies z = -2x$ **

** in IV:

$x^2 + x^2 + (-2x)^2 - 1 = 0$

$\iff 6x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{6}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{6}} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$

2 Kandidaten:

$P_1\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

$P_2\left(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

Fall 2: $\lambda_2 = 0$

in III: $2\lambda_1 \cdot z = 0 \implies z = 0$ oder $\lambda_1 = 0$

$z = 0 \implies x = -y$ (*)

gl. V

$\circledast$ in $\underline{IV}$: $x^2 + x^2 + 0^2 = 1 \iff 2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

mit $\circledast$: $y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

nochmals 2 Kandidaten:

$P_3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

$P_4\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

Fall $\lambda_1 = 0$ $\quad$ I und II : $x = y = 0$

$\underline{V}$ $\quad z = 0$

↯ zu $\underline{IV}$ $\lambda_1 = 0$ tritt nicht ein !

Also 4 Kandidaten:

$f(P_1) = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$f(P_2) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

} kürzester Abstand zur z-Achse

$f(P_3) = 1$

$f(P_4) = 1$

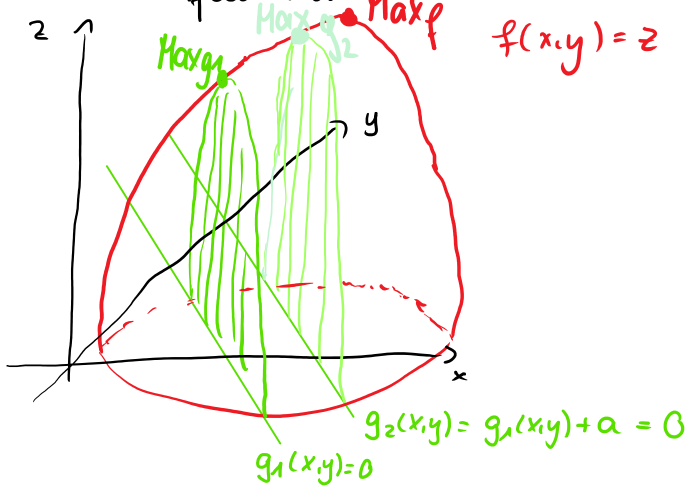
} größter Abstand zur z-Achse

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g_1(x,y) \qquad g_2(x,y) = g_1(x,y) + a$$

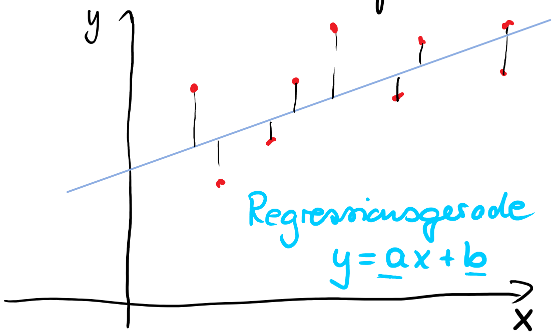
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g_1(x,y) + a)$$

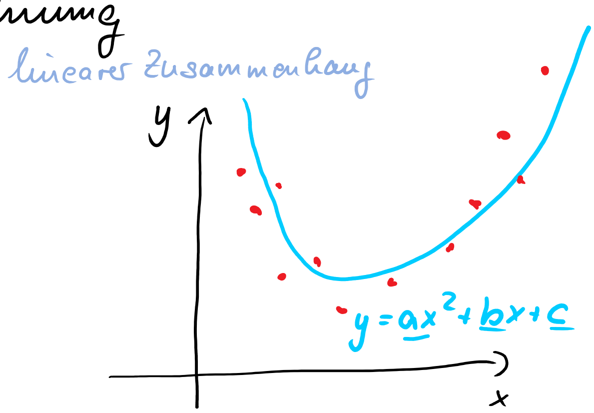
$\frac{dL}{da} = \lambda$ infinitesimale Änderungsrate des Absolutgliedes der NB hat die λ-fache Wirkung auf die Zielfunktion



Anwendung der mehrdimensionalen Differentialrechnung

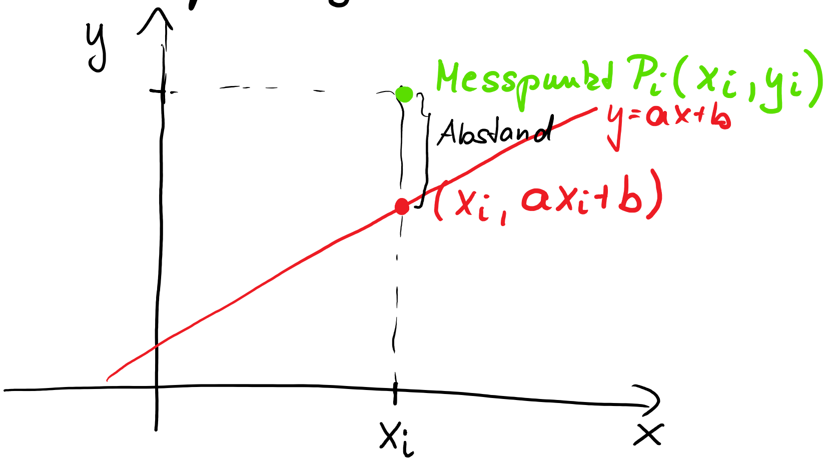
Ausgleichsrechnung





Lineare Anpassung

Methode der kleinsten Quadrate von C. F. Gauß



$y = ax + b$

Abstand : $\left(y_i - (\underline{a}x_i + \underline{b})\right)$

Die Summe der Abstandsquadrate n Messpunkte

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \Big[y_i - \underbrace{(ax_i + b)}_{\text{gerade}}\Big]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^2 - 2y_i(ax_i+b) + (ax_i+b)^2\right)$$

$a^2x_i^2 + 2ax_i b + b^2$

a, b sind nun die Unbekannten, die Variablen der Fkt. Q

Für Q wird ein Extremwert berechnet, welcher ein Minimum sein muss!

Notwendige Bedingungen: Q(a,b) ableiten

$$Q_a(a,b) = 0 \qquad Q_b(a,b) = 0$$

$$Q_a(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2y_i x_i + 2(ax_i+b)(x_i)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} \left(-x_i y_i + a x_i^2 + b x_i\right) = 0$$

$$Q_b(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} \left(-y_i + ax_i + b\right) = 0$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(-x_i y_i + a x_i^2 + b x_i\right) = 0$$