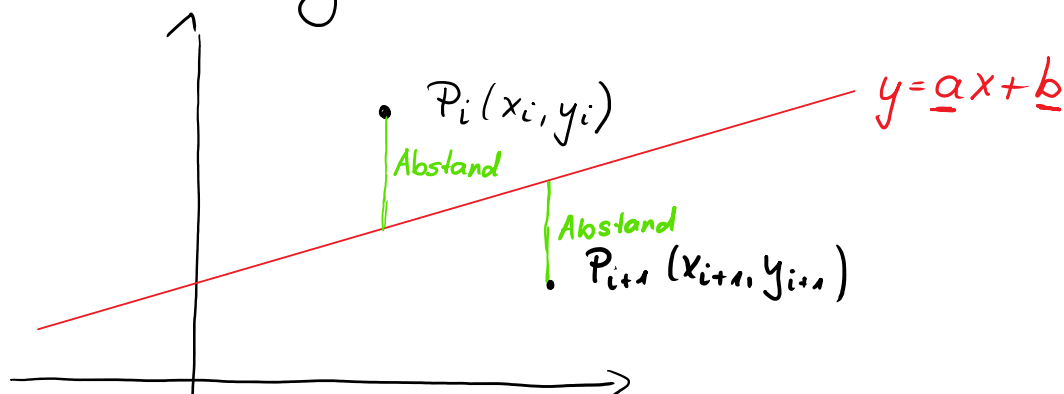


Vorlesung Mathematik 2 1.7.24



$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \quad \text{2 unabh. Variablen } a \text{ und } b$$

Zu bestimmen: Minimum

$$Q_a(a, b) = 0 \quad Q_b(a, b) = 0 \quad \text{notwendige Bedingungen}$$

$$\text{I } Q_a(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n -x_i y_i + \underline{a} x_i^2 + \underline{b} x_i = 0$$

$$\text{II } Q_b(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n (-y_i + \underline{a} x_i + \underline{b}) = 0$$

Auflösen und umformen:

$$\text{Aus I: } \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\textcircled{*} \text{ Aus II: } \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b$$

$$\text{Es ist: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{arithmetische Mittel der } x_i\text{-Werte}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{arithmetische Mittel der } y_i\text{-Werte}$$

$$\text{damit: } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \left(a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b \right)$$

$\textcircled{*}$

damit: $n \sum_{i=1}^n y_i = \bar{n} (a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b)$

(*)

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} **$$

** in I: ----

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

Skizze Nachweis Minimum

$$Q_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

$$Q_{bb} = \sum_{i=1}^n 2 = 2n > 0$$

$$Q_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

Zu zeigen $\Delta = Q_{aa} \cdot Q_{bb} - Q_{ab}^2 > 0$ kann man beweisen
und damit (mit $Q_{aa} > 0$) handelt es sich um ein
Minimum

Anpassung mit Hilfe von Ausgleichskurven

lineare Funktion $y = ax + b$

Zu bestimmen

a, b

Anzahl Var.

2

Regressionsgerade

quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$

a, b, c

3

Potenzfunktion $y = ax^b$

a, b

2

Exponentialfunktion $y = a \cdot e^{bx}$

a, b

2

Bsp. Exponentieller Zusammenhang: n Messwerte (Punktpaare)

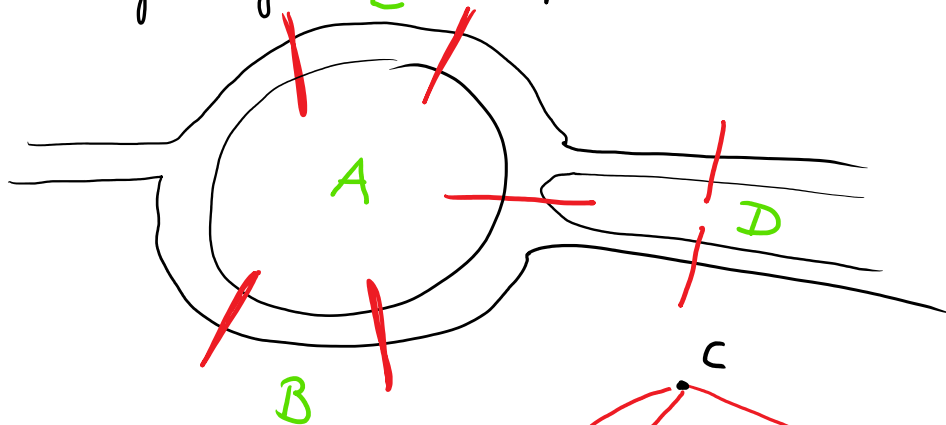
$$\text{Ansatz: } Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot e^{bx_i})^2$$

Graphentheorie

Historisches Beispiel

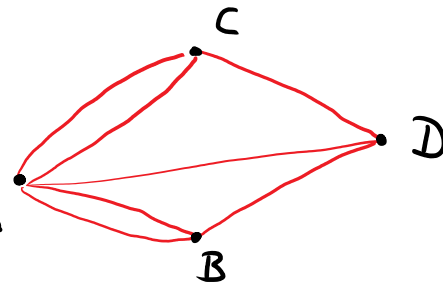
Leonard Euler 1736 in Königsberg

Königsberger Brückenproblem



Problem:

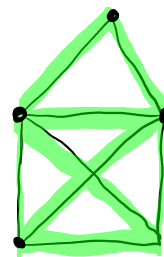
Rundgang durch die Stadt
mit jeweils nur einer Überquerung
der sieben Brücken?



Stadtteile:
Knoten
Brücken:
Kanten

Bp. Eulersche Linie

"Haus vom Nikolaus"



"Alle Kanten nur
einmal benutzt
beim Durchgang"

Def: (Graph)

Ein Graph besteht aus einer Menge $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ von
Knoten, einer Menge $K = \{k_1, \dots, k_m\}$ von Kanten
und einer Abbildung v , die jeder Kante $k_i \in K$ eindeutig zwei

Knoten aus M zuordnet.

Eine Kante kann ungeordnet sein: $\{x_i, x_j\}$

ungerichtet
gewöhnlicher Graph

Oder geordnet sein: (x_i, x_j)

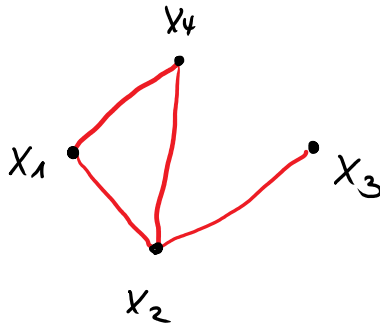
gerichtet
der Graph heißt
Digraph

$G = (M, K, v)$ heißt Graph

Merkmale: Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen
benachbart oder **adjacent**

Die Kante, die diese zwei Knoten verbindet,
heißt mit diesen **inziident**

Bsp:



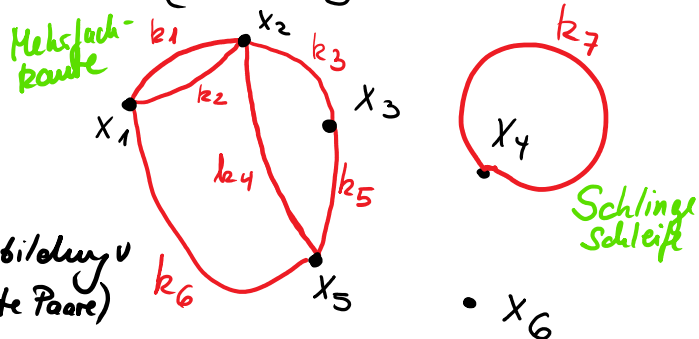
Bsp: $G = (M, K, v)$ mit $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
 $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$

$v(k_1) = \{x_1, x_2\}$ $v(k_2) = \{x_1, x_2\}$

$v(k_3) = \{x_2, x_3\}$ $v(k_4) = \{x_2, x_5\}$

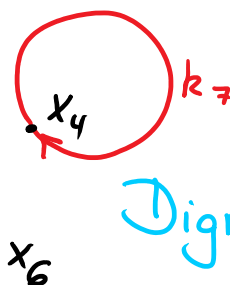
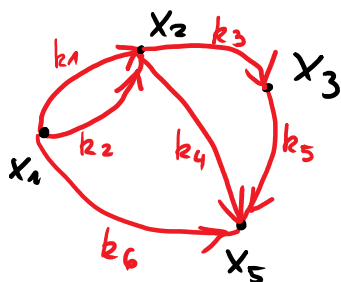
$v(k_5) = \{x_3, x_5\}$ $v(k_6) = \{x_1, x_5\}$

$v(k_7) = \{x_4, x_4\}$



Zeichnen Sie den Graphen:

Fall: Statt geschweiften Klammern in der Abbildung
nun "runde" Klammern (geordnete Paare)



isolierter Knoten
gewöhnlicher Graph

Digraph = gerichteter Graph

Def: (Knotengrad in ungerichteten (gewöhnlichen) Graphen)

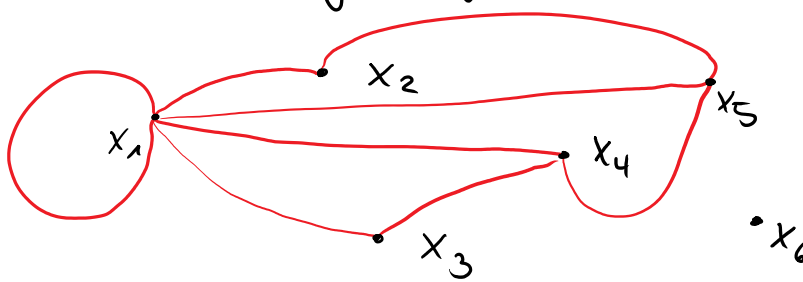
Die Anzahl der mit einem Knoten x_i inzidenten Kanten heißt der Knotengrad: $d(x_i)$ Schleifen zählen doppelt!

Def: (Knotengrad in gerichteten Graphen (Digraphen))

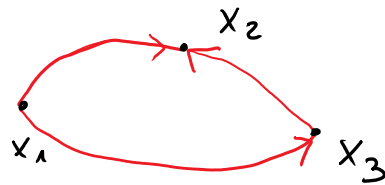
$d^+(x_i)$ Ausgangsgrad Anzahl der in x_i beginnenden Kanten

$d^-(x_i)$ Eingangsgrad Anzahl der in x_i ankommenden Kanten

Bp:



$$\begin{aligned} d(x_1) &= 6 \\ d(x_2) &= 2 \\ d(x_3) &= 2 \\ d(x_4) &= 3 \\ d(x_5) &= 3 \\ d(x_6) &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d^+(x_1) &= 2 & d^-(x_1) &= 0 \\ d^+(x_2) &= 0 & d^-(x_2) &= 2 \\ d^+(x_3) &= 1 & d^-(x_3) &= 1 \end{aligned}$$