

Mathevorlesung 8.7.2024

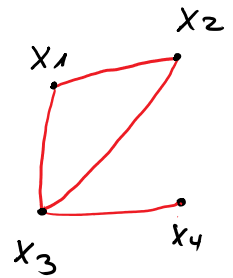
Matrizendarstellung

Adjazenzmatrix

Bp:

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

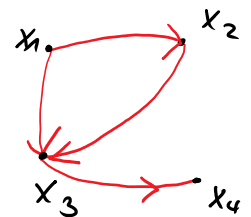
ungerichteter Graph
Matrix symmetrisch



gerichteter Graph

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matrix nicht symmetrisch



Def: Inzidenzmatrix

Geg Graph G mit Knoten x_i $i=1, \dots, n$
mit Kanten k_j $j=1, \dots, k$

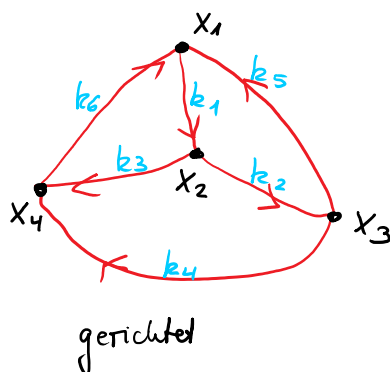
Sei eine $(n \times k)$ -Matrix mit $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k_j \text{ mit } x_i \text{ inzidiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Es heißt die Inzidenzmatrix
($n \times k$)-Matrix

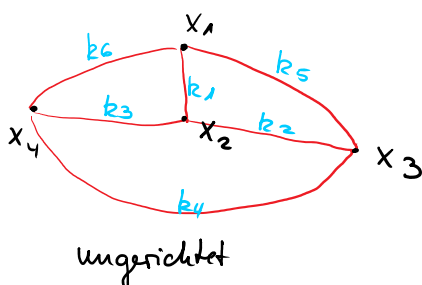
(ungerichteter Graph)

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k_j \text{ von } x_i \text{ ausgeht} \\ -1, & \text{wenn } k_j \text{ in } x_i \text{ endet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bp:



$$\begin{matrix} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

In der Regel betrachtet man **schlichte Graphen**, das sind Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten
 Wichtig beim "Durchlaufen" von Graphen ($\rightarrow$ später)

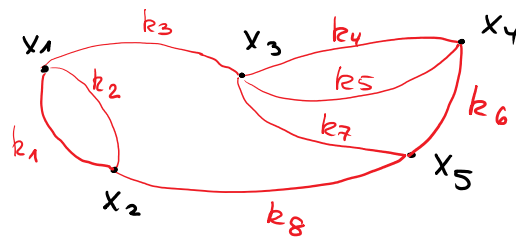
Def: (Weg, Kantenfolge)

Gegeben G Graph. Ein Teilgraph G^* mit der Eigenschaft $V(k_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$
 $i = 1, \dots, m$

heißt Weg oder Kantenfolge

Bei Startknoten = Zielknoten : geschlossene Kantenfolge (Zyklus, Kreis)
 sonst : offene Kantenfolge

Die Länge der Kantenfolge : Anzahl der zugehörigen Kanten



Bp: Kantenfolge k_1, k_3, k_4, k_6

Beschreibung mittels Kanten

x_2, x_1, x_3, x_4, x_5

Beschreibung mittels Knoten

Def: Weg

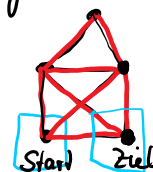
Eine Kantenfolge (Kantenzug), bei der alle vorkommenden Knoten verschieden sind, heißt Weg

Def (Eulerzug)

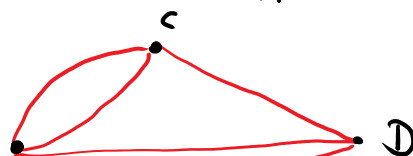
Ein Kantenzug, der jede Kante eines Graphen genau einmal enthält, heißt Eulerzug oder Eulersche Linie

Satz: (Euler 1736)

Ein endlicher, ungerichteter, nicht notwendig schlichter Graph $G = (M, K, V)$ besitzt genau dann eine Eulersche Linie, wenn G bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und die Zahl z der Knoten mit ungeradem Knotengrad höchstens 2 ist.

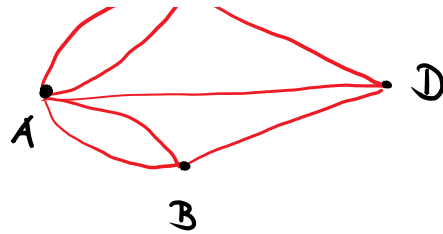


kein geschlossener Kantenzug



Königsberger Brückenproblem

Alle Knotengrade sind ungerade

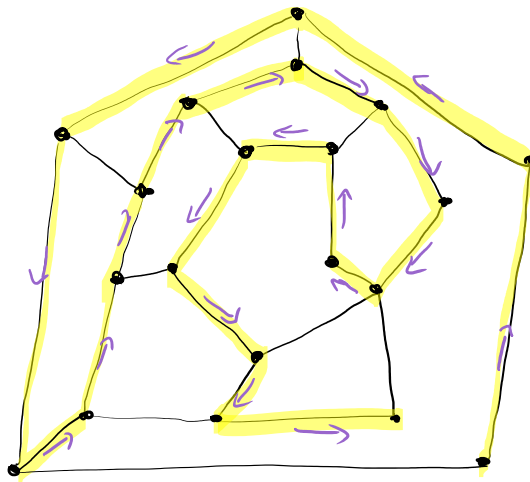


Königsberger Brückenproblem
 Alle Knotengrade sind ungerade
 (4 Knoten)

Def. (Hamiltonsche Linie)

Ein Weg, der jeden Knoten eines Graphen genau einmal enthält
 (Anfang = Ende, dann Hamilton'scher Kreis)

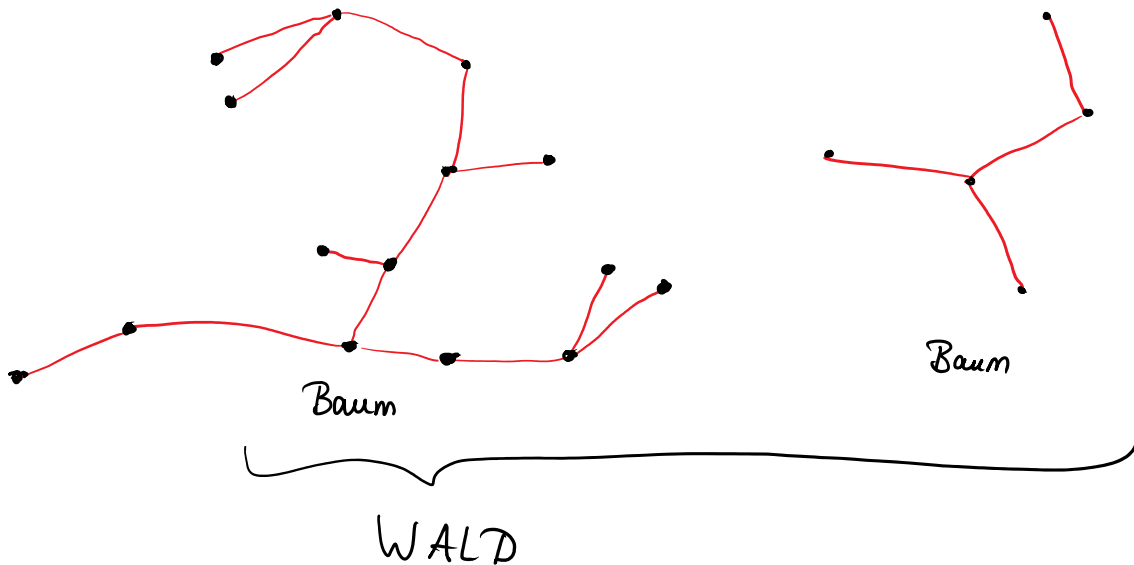
Bp:



Bäume und Wälder

Def. (Baum)

Ein zusammenhängender Graph ohne geschlossene Kanten/Dg, in dem je zwei Knoten durch genau einen Weg verbunden sind, heißt Baum.



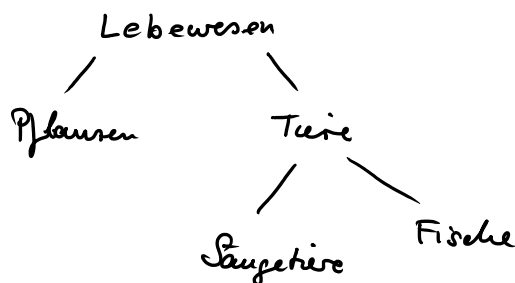
Bem: In jedem Baum mit $d(x_i) > 1$ ist x_i ein trennender Knoten
Knoten mit $d(x_i) = 1$ heißen Randknoten oder Blätter

Satz: Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten

Beweis: Durch vollständige Induktion

Wo findet man Bäume?

Biologie:



Au Mi weiter mit Wurzelbäume