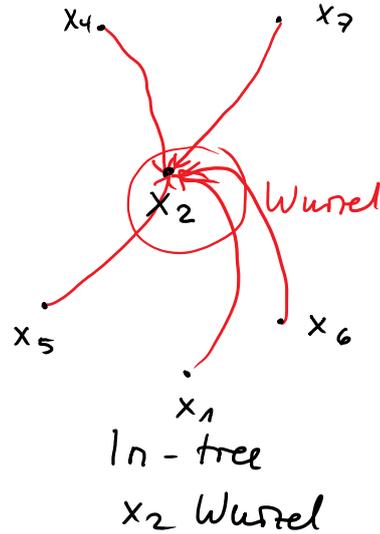
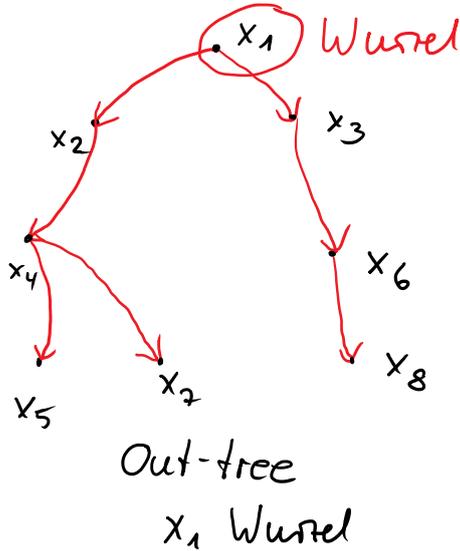


Vorlesung Mathe 2 10.7.24

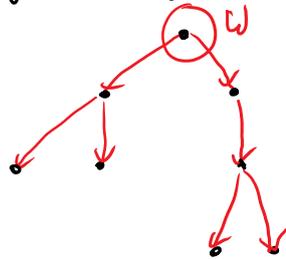
Def. (Wurzelbäume)

Digraph m. einem ausgezeichneten Knoten, die Wurzel, von der aus alle anderen Knoten erreichbar sind.



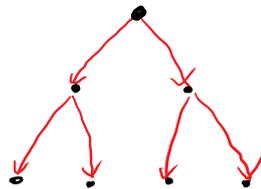
Def: Höhe eines Wurzelbaums

maximal mögliche Länge von der Wurzel zum Blatt



Höhe : 3

Def: Binärbaum



Jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger

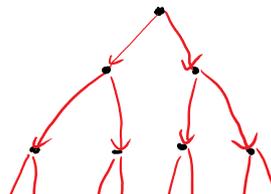
üblicherweise: Out-trees

Wurzel: Eingangsgrad 0

andere Knoten: Eingangsgrad 1

Bp: Höhe eines Binärbaums

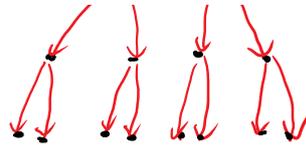
H : Anzahl der Knoten im längsten Weg



hier: $2^4 - 1 = 15$

H : Anzahl der Knoten im längsten Weg

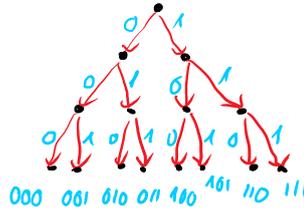
hier $H = 4$



hier : $2^4 - 1 = 15$

Anzahl der Knoten im Baum : $2^H - 1$

Bp: Aussagenlogik



Wo findet man Binärbäume?

Verschlüsselung

Suchbäume : Binärer Suchbaum BST

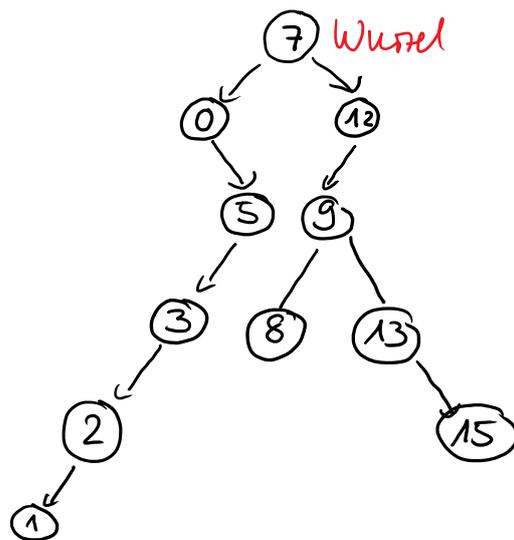
Daten mit sortierbarem Schlüssel

Knoten tragen die Schlüssel "kleiner gleich"
"größer gleich"

Sind vom Anwender festzulegen

Bp für eine Suche :

geg. Datenmenge [7, 12, 0, 5, 9, 3, 8, 2, 13, 10, 15, 1]



mit Schlüssel links <
rechts >

Suche die (3)

Umfang der Suche

= Anzahl der Vergleiche (V)

geg : Baum der Höhe H

$V = H$

Frage: Wieviel Einträge sind bei 10 Vergleichen speicherbar?

$$2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023 \text{ Einträge}$$

Huffman - Code (David A. Huffman 1925-1999)

primäre Idee: häufig auftretende Zeichen durch kürzere Codes darstellen

Problem bei unterschiedlich langen Codes: Eindeutigkeit
kein Code darf Anfang eines anderen Codes sein
präfixfreier Code

- Bp: 1) 0, 10, 11 präfixfrei
2) 0, 01, 10 nicht präfixfrei

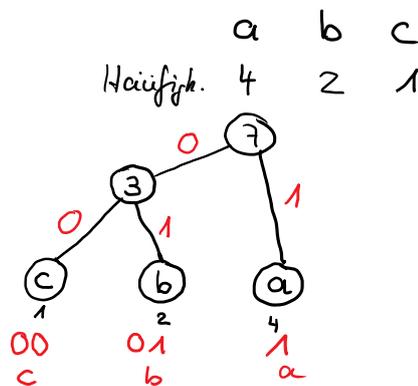
Zusammenhang mit Binärsbaum?

Die Darstellung des Codes erfolgt durch einen Binärsbaum

Aufbau dieses Baumes:

- 1) Ermitteln der rel. Häufigkeiten von jedem Buchstaben bzw. Zeichen
- 2) Jeder Buchstabe bzw. Zeichen wird zum "Blatt"

Kleines Beispiel: abacaba zu codierende Sequenz



Dekodieren Sie: 01110001011100
b a a c b b a a c

Bp: MISSISSIPPI_IST_MISSISSIPPI

	M	I	S	P	_	T
Häufigkeit	2	9	9	4	2	1

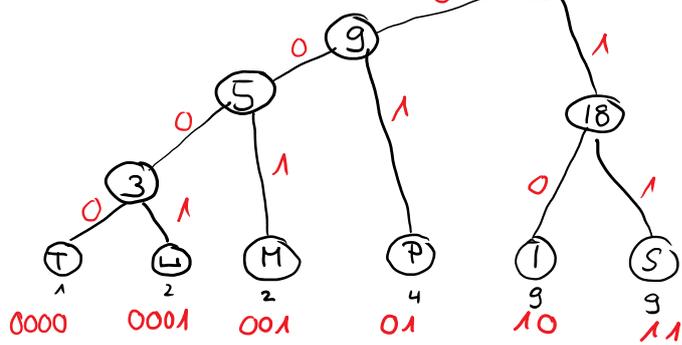
Tipp: Sortieren der Häufigkeit nach

T: 1	M: 2	P: 4
I: 2	T: 3	M, T: 5
M: 2	P: 4	I: 9
P: 4	I: 9	S: 9
I: 9	S: 9	
S: 9		

Handwritten annotations: 3, 5, 9, 18, 27

Huffman-Baum (27)

Huffman-Baum $S: 9$



Anwendung: Kompression von Texten

Beispielaufgabe könnte sein:

Geg: $001 : M$ $T : 0000$ $P : 01$
 $10 : I$ $L : 0001$ $S : 11$

Entschlüsseln Sie: 00110110000
 M I S T

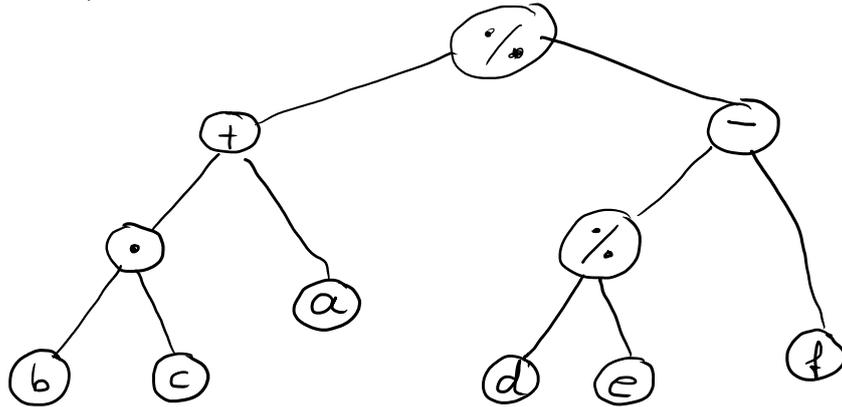
Weitere Beispiele für Binärbäume

Darstellung arithmetischer Ausdrücke

$$\frac{a + b \cdot c}{\frac{d}{e} - f}$$

Innere Knoten: Rechenverfahren / Operatoren

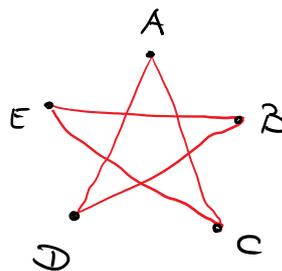
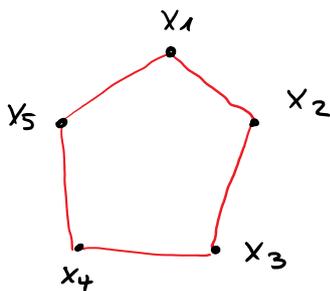
Blätter: Variablen oder Konstanten



1. Nachtrag Def: Isomorphe Graphen

Zwei Graphen G, G' heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung φ von der Knotenmenge des einen Graphen G in die Knotenmenge von G'

$$\{x_i, x_j\} \text{ Kante von } G \quad \{ \varphi(x_i), \varphi(x_j) \} \text{ Kante von } G'$$

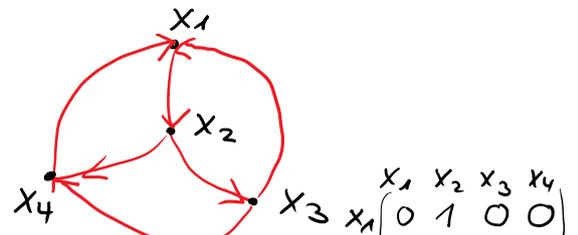


Bijektive Abb: $\varphi(x_1) = A$ $\varphi(x_2) = C$ $\varphi(x_3) = E$ $\varphi(x_4) = B$
 $\varphi(x_5) = D$

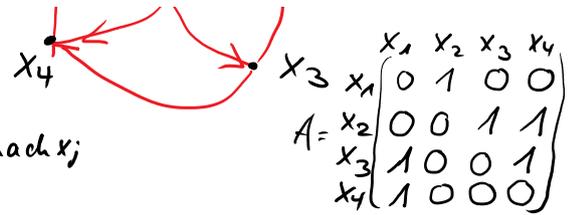
2. Nachtrag zu den Adjazenzmatrizen

Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen

Mit Hilfe der Potenzen $A^r = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{r \text{ mal}}$ lassen sich Aussagen über die Anzahl von Pfeilfolgen in



Mit Hilfe des folgenden r -mal
 sich Aussagen über die Anzahl von Pfeilfolgen in
 Digraphen machen.



Zur Erinnerung: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Pfeil von } x_i \text{ nach } x_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Sei A^r gegeben, dann gibt $a_{ij}^{(r)}$ der Matrix A^r die Anzahl der verschiedenen
 Pfeilfolgen der Länge r an.

Berechnen Sie im Bp. A^2 und interpretieren Sie diese Matrix.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Wege der Länge 2
 von x_2 nach x_1

1 Weg der Länge 2 von x_4 nach x_2