13. Differentialgleichungen

[Literatur: Teschl05, Bd. 2, S. 171-197]

13.1. Wozu braucht man Differentialgleichungen?

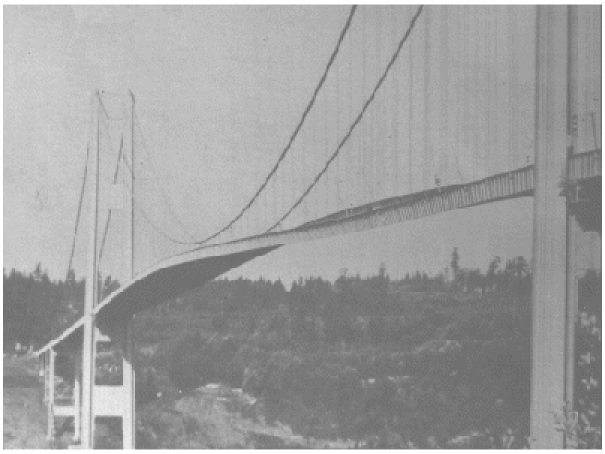
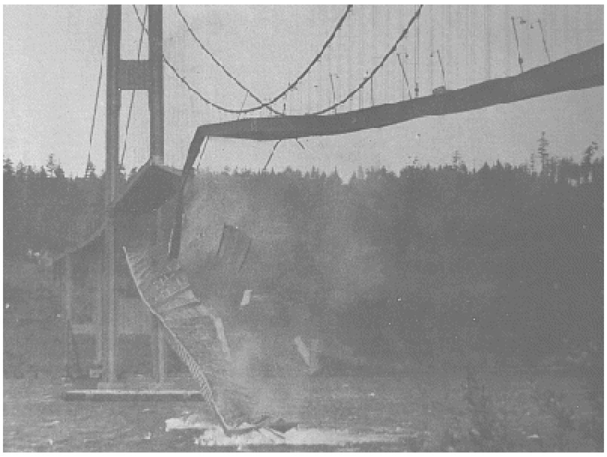
Am 28. Juli 2006 stürzte in Köln ein Kran samt Lastwagen um. Was war passiert? –

- Die Tragegurte am zu transportierenden Gegenstand (Tresor) rissen
- Der Kran wurde in Schwingungen versetzt und stürzte um.

Der Kran ist ein komplexes technisches System, das zu Schwingungen in der Lage ist.[9]

Die **Computersimulation** (mit Differentialgleichungen) untersucht solche Systeme, um bereits bei der Konstruktion aufzudecken, ob gefährliche Schwingungen im System stecken.

Weiteres berühmtes Beispiel: **Tacoma Bridge** Failure (Video) am 07. November 1940:

Was war passiert?

- Ein starker Wind hatte die Brücke zu Schwingungen aufgeschaukelt, die die Brückenkonstruktion nicht geeignet dämpfte.
- Die Neukonstruktion der Brücke hatte entsprechende Dämpfungselemente eingebaut und hält seither allen Winden stand.

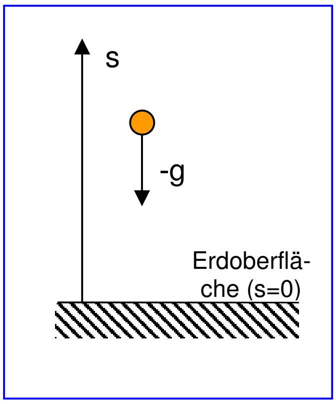
Die Simulation (mit Differentialgleichungen) ist ein wichtiges Hilfsmittel in Informatik und Ingenieurwesen, um das Verhalten in Extremfällen zu verstehen. Weiteres Anwendungsfeld sind Computerspiele: **Game Physics.**

Mehr dazu im **WPF „Spiele, Simulation und dynamische Systeme“** (W. Konen).

Hier befassen wir uns mit sehr einfachen dynamischen Systemen

- freier Fall
- Federpendel

an denen wir die Grundlagen der **Differentialgleichungen (DGL)** erklären.



13.2. Grundlagen

Aktivierung: Wie kann man den physikalischen Vorgang „Freier Fall eines Körpers“ mathematisch beschreiben? Welchen Kräften unterliegt der Körper?

[9] Weitere spektakuläre Kran-Umstürz-Photos: www.craneaccidents.com

ANTWORT:

Als Antwort erhalten wir eine Gleichung, die die Ableitungen einer Funktion – hier s(t) – enthält.

Satz S 13-1: gewöhnliche Differentialgleichung n. Ordnung

Sei y(x) eine reelle Funktion in <u>einer</u> Veränderlichen $x \in R$. Eine Gleichung, in der y(x) und ihre Ableitungen bis zur n. Ordnung auftreten, heißt **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n. Ordnung**.

Ist die DGL nach $y^{(n)}(x)$ aufgelöst, so heisst sie **explizit**: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Ist sie es nicht, so heisst sie **implizit**: $F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Satz S 13-2: lineare Differentialgleichung

Sei y(x) eine reelle Funktion in <u>einer</u> Veränderlichen $x \in R$. Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

in der also die $y^{(i)}$ nur als lineare Terme auftauchen, heißt **lineare Differentialgleichung n. Ordnung**. g(x) (der einzige Term, in dem y nicht vorkommt) heißt **Störglied**.

Ist das Störglied g(x)=0, so heißt die DGL **homogen**, sonst **inhomogen**.

Sind die a_0, a_1, ..., a_{n-1} keine Funktionen von x sondern Konstanten, so haben wir den Sonderfall der **linearen DGL mit konstanten Koeffizienten**.
(Das Störglied darf weiterhin eine nichtkonstante Funktion g(x) sein)

Ü

<u>Übung</u>: Interpretieren Sie die nachfolgenden DGLs:

(a) $y'(x) = -2x$ ____________________

(b) $x + yy' = 0$ ____________________

(c) $\ddot{s}(t) = g$ ____________________

(d) $y'' + y = 0$ ____________________

(e) $2y'' - 4y' + 20y = \cos(\omega x)$ ____________________

13.3. *Lösung einfacher Differentialgleichungen*

13.3.1. Nur ein Ableitungsterm

DGLs, in denen nur <u>ein</u> Ableitungsterm auftritt, lassen sich oft recht einfach durch Integrieren lösen:

Beispiel freier Fall:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

1. Integration $\Rightarrow \quad \int \ddot{s}(t)dt = -\int g dt \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(t) = -gt + C_1$ (1)

2. Integration $\Rightarrow \quad \int \dot{s}(t)dt = \int (-gt + C_1)dt \quad \Rightarrow \quad s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$ (2)

<u>**Aktivierung**</u>: Welche Bedeutung haben die Integrationskonstanten $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$?

ANTWORT:

Bem.:

1. Die Lösung mit unbestimmten Integrationskonstanten C_1 und C_2 heißt **allgemeine** Lösung der DGL.
2. Eine DGL n. Ordnung hat n unbestimmte Konstanten (freie Parameter).
3. Eine Lösung mit bestimmten Werten für C_1 und C_2 heißt **spezielle** (**partikuläre**) Lösung der DGL.
4. Legt man bei einer DGL n. Ordnung n Anfangswerte fest, so erhält man genau eine spezielle Lösung.

Ü

<u>**Übung**</u>: Gegeben sei $\ddot{s}(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

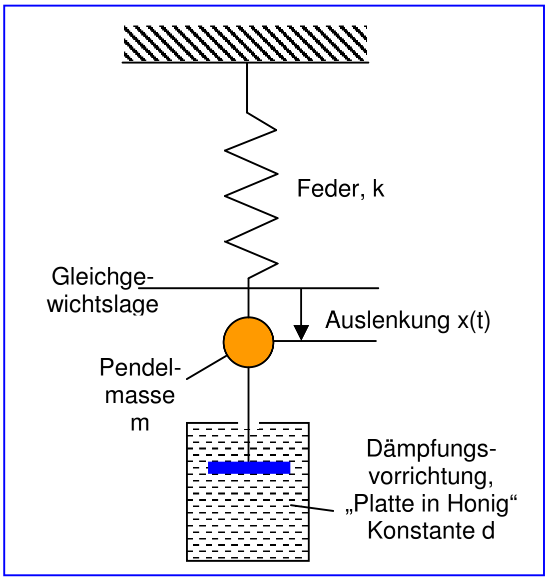
(a) Interpretieren Sie die DGL (Ordnung, explizit, linear, homogen)

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung s(t)

(c) Wie lautet die spezielle Lösung für $\dot{s}(1) = 2$ und $s(1) = 2$?

13.3.2. Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Aktivierung: Welche Kräfte wirken am Federpendel?
ANTWORT:



Es ergibt sich also eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten:

(1) $$\ddot{x}(t) + \frac{d}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Homogene lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

lassen sich besonders einfach lösen durch den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbf{C}$.

Satz S 13-3: Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten 1) **Spezielle Lösungen** einer homogenen linearen DGL ermittelt der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbf{C}$
2) **Superpositionsprinzip**: Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen einer homogenen linearen DGL, so ist auch jede Linearkombination $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ eine (allgemeine) Lösung dieser DGL mit $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$.
3) **Real- und Imaginärteil als Lösung**: Ist $x(t)$ eine (komplexe) Lösung der homogenen linearen DGL mit konstanten und **reellen** Koeffizienten, so sind auch Realteil $\mathrm{Re}(x(t))$ und Imaginärteil $\mathrm{Im}(x(t))$ (eigenständige) Lösungen dieser homogenen linearen DGL. Es ist $a\,\mathrm{Re}(x(t)) + b\,\mathrm{Im}(x(t))$ eine (allgemeine) Lösung dieser DGL. Wählt man $a, b \in \mathbf{R}$, so ist die Lösung rein reell.

Herleitung in Vorlesung.

Anmerkung: Das Superpositionsprinzip enthält als Spezialfall (für $x_2(t)=0$) die Aussage, dass mit $x_1(t)$ auch jedes Vielfache $c_1x_1(t)$ eine Lösung der DGL ist.

Beispiel: Ein radioaktiver Zerfall werde beschrieben durch die DGL $\dot{x}(t) = 0.05x(t)$. Wie lautet x(t), wenn x(0)=4 gelten soll?

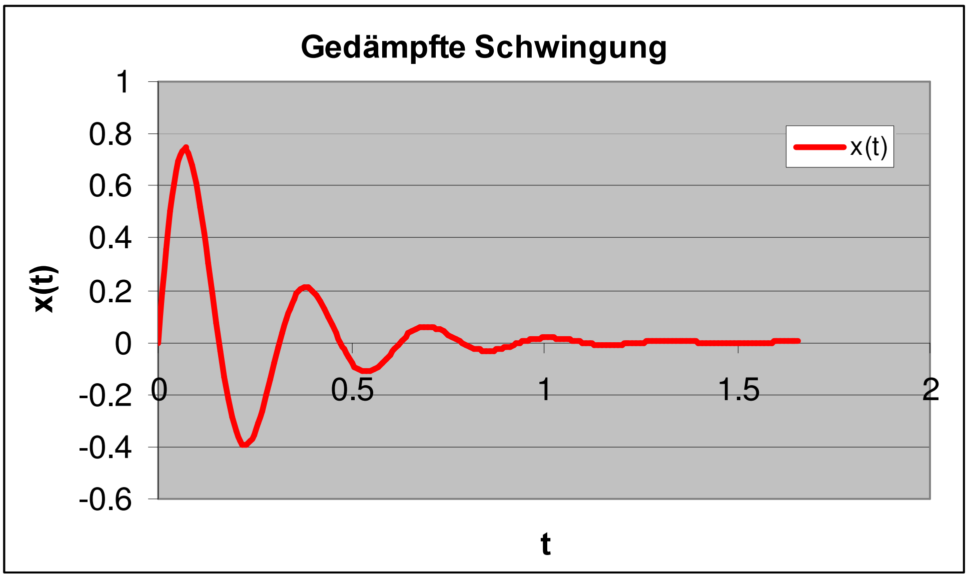
Lösung: Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ liefert $\lambda e^{\lambda t} = 0.05e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.05$.

Die allgemeine Lösung lautet gem. Superpositionsprinzip $x(t) = c_1 e^{0.05t}$. Die Bedingung $x(0)=c_1=4$ führt auf $x(t) = 4e^{0.05t}$.

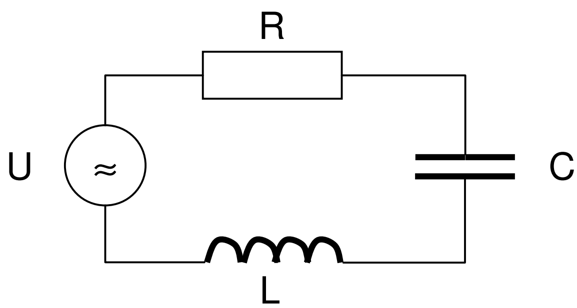
Übung 1: Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$
(Dies ist eine Gleichung vom Typ „Ungedämpftes Federpendel“ mit d/m=0 und k/m=4)

Übung 2: Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 404x(t) = 0$
(Dies ist eine Gleichung vom Typ „Gedämpftes Federpendel“ mit d/m=4 und k/m=404)

Eine spezielle Lösung dieser DGL sieht wie folgt aus (Mathe-Reihen-V2.xls, Blatt "DGL Schwingung"):



Beispiel: Derselbe Vorgang spielt sich auch beim elektromagnetischen Schwingkreis ab:



Nach dem Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe der Spannungsabfälle am Widerstand R, Kondensator C und an der Spule L gleich der Spannung U an der Spannungsquelle

$$U(t) = U_L \quad + \quad U_R + \quad U_C$$
$$= LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t)$$

Hierbei ist $I(t)$ der Strom und $Q(t)$ die Ladung. Weil Strom die Änderung der Ladung pro Zeit ist, also $I(t)=Q'(t)$, können wir auch schreiben

(§§) $$U(t) = LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$Q''(t) + \frac{R}{L}Q'(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \frac{U(t)}{L}$$

Für den Fall $U(t)=0$ (keine äußere Spannungsquelle) entspricht das genau der Gl. (1) am Anfang von Kapitel 13.3.2: die Spule L spielt die Rolle der Masse m, der Widerstand R entspricht der Dämpfung d und der Kehrwert der Kapazität C entspricht der Federkonstanten k. Es liegt eine homogene DGL der gedämpften Schwingung vor, also Lösung wie oben.

Für den Fall $U(t)\neq 0$ liegt eine inhomogene Schwingungs-DGL vor, mit deren Lösung wir uns im Kapitel 13.3.4 beschäftigen.

Zwischenfazit:

Wir sehen hier den großen Vorteil komplexer Zahlen: Durch den Ansatz $x(t) = ae^{\lambda t}$ mit $\lambda, a \in C$ lassen sich ganz verschiedenartige Probleme (radioaktiver Zerfall, ungedämpfte Schwingung, gedämpfte Schwingung, elektromagnetischer Schwingkreis) in EINEM Framework lösen.

$\Rightarrow$ „ONE SIZE FITS ALL!“

13.3.3. Lösbarkeit von DGLs; Anfangswertprobleme

Satz S 13-4: Satz von Picard-Lindelöf

Sei f eine **stetig differenzierbare** Funktion. Dann hat die explizite DGL n. Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f\left(x^{(n)}(t), \ldots, x(t), t\right)$$

zusammen mit den n Anfangsbedingungen

$$x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \quad \ldots \quad, x(t_0) = x_0$$

für jede Wahl der Anfangswerte x_{n-1}, … , x_0 eine **eindeutige** Lösung, die in der Nähe von t_0 definiert ist.

Das so spezifizierte Problem heißt **Anfangswertproblem** (DGL n. Ordnung plus n Bedingungen an Funktion und Ableitungen von x(t) zum Zeitpunkt $t=t_0$)

Anmerkungen:

- Mit anderen Worten: Da man jeden der n Anfangswerte x_{n-1}, …, x_0 frei wählen kann, muss die Lösung der DGL n freie Parameter haben. Man nennt diese Lösung mit freien Parametern auch die **allgemeine Lösung** der DGL.

- Bei einer DGL 1. Ordnung muss man also einen Anfangswert der Funktion x zum Zeitpunkt t_0 festlegen.
- Bei einer DGL 2. Ordnung muss man $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ festlegen (z.B. Startort und Startgeschwindigkeit).
- Eine Lösung, bei der alle freien Parameter konkrete Zahlenwerte haben, heißt **spezielle Lösung** der DGL.
- Auch wenn f auf ganz R stetig differenzierbar ist, kann es sein, dass die Lösung x(t) nur in einer (kleinen) Umgebung von t_0 existiert.
- Der Satz gilt für **alle** expliziten DGLs, nicht nur für lineare.

Übung: Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) - 9x(t) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad x(0) = 0$$

13.3.4. Inhomogene Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Satz S 13-5: Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = g(t)$$

läßt sich schrittweise wie folgt lösen:

1) **Allgemeine Lösung** der homogenen linearen DGL mit Ansatz

$$x_h(t) = e^{\lambda t} \text{ mit } \lambda \in \mathbf{C}$$

ermitteln. Wenn es zwei Lösungen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ gibt, diese (oder ihre Realteile) superponieren:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

2) **Partikuläre Lösung** der inhomogenen DGL durch geeigneten Ansatz:

- Wenn g(x)=c=const, dann Ansatz $x_p(t) = A$
- Wenn g(x)=sin(ωt) (Schwingung), dann Ansatz $x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$
- Besser: Wenn g(x)=$e^{i\omega t}$ (Schwingung) , dann Ansatz $x_p(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$

Konstanten A, B, φ durch Einsetzen in die inhomogene DGL bestimmen.

3) **Superposition**: Jede Lösung der inhomogenen DGL hat die Form

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

d.h. sie entsteht durch Addition (Superposition) von x_h und x_p.

Fazit aus 3): Kennt man **eine** partikuläre Lösung x_p, so kann man damit **alle** Lösungen der inhomogenen DGL darstellen.

Beispiel 1: (Ladevorgang Kondensator). Wir spezialisieren die allgemeine Gleichung (§§) aus Kap. 13.3.2 für einen Schwingkreis auf den Fall „keine Spule“ (L=0) und konstante äußere Spannung $U(t) = U_0$ = konst.

$$RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U_0$$

Der übliche Ansatz $Q(t)=e^{\lambda t}$ für die homogene Gleichung führt auf $\lambda R+1/C=0$, also

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

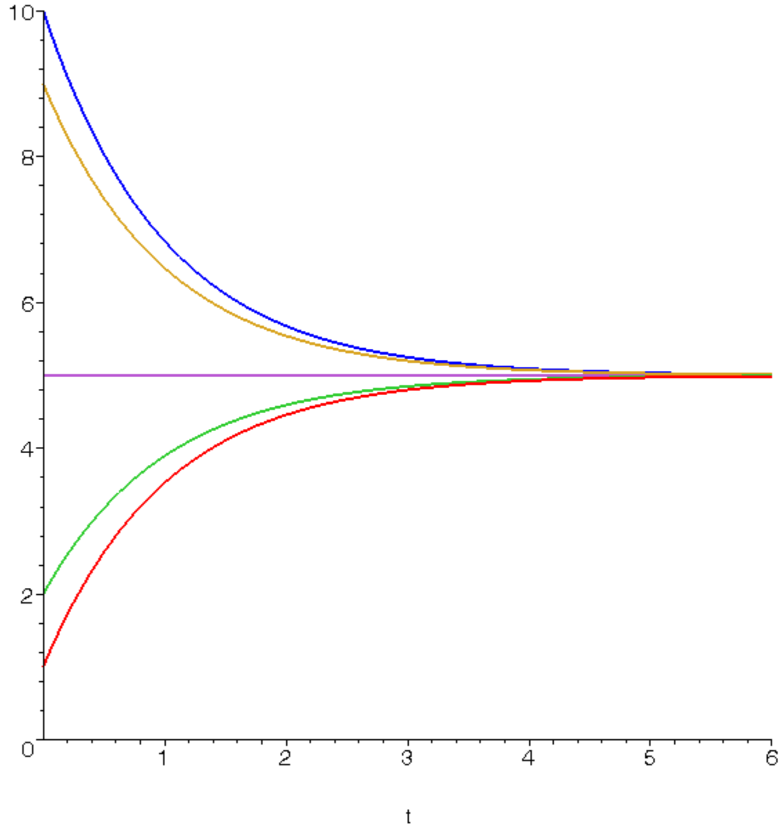
Wenn das Störglied eine Konstante U_0 ist, so kann man annehmen, dass auch eine konstante Funktion die DGL löst >> Ansatz $Q(t)=Q_0$. Wegen $Q'(t)=0$ folgt durch Einsetzen in die inhomogene DGL

$$\frac{1}{C}Q_0 = U_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_0 = CU_0$$

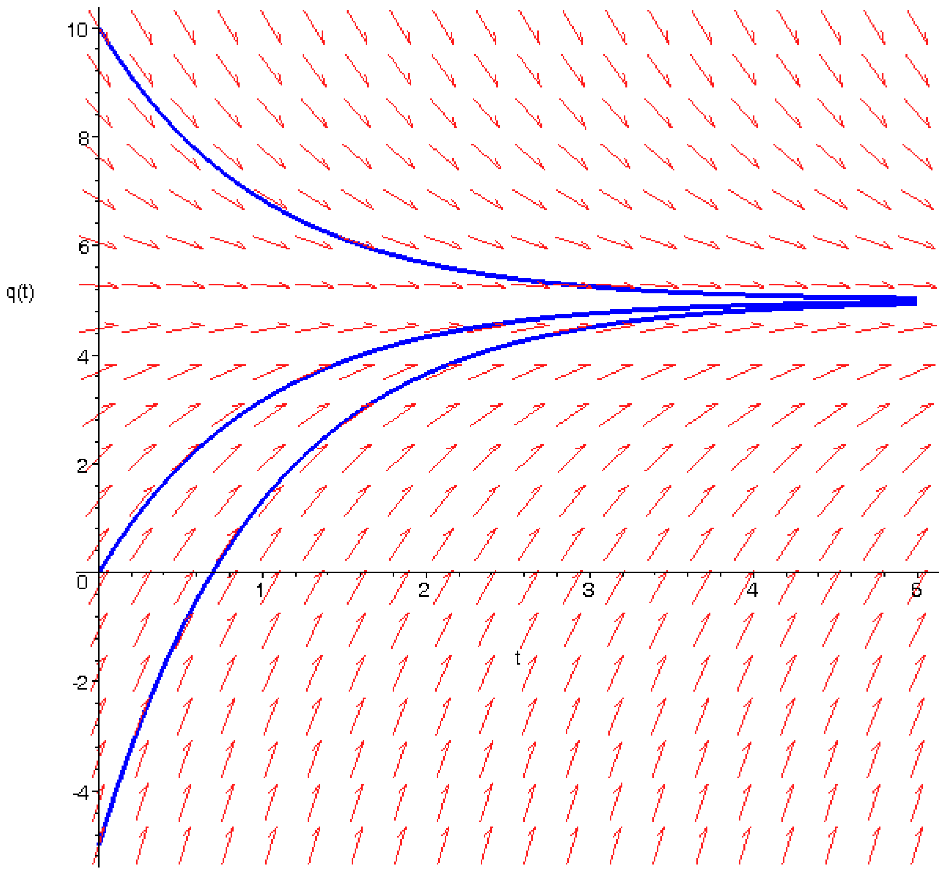
Die gesamte Lösung ist dann

$$Q(t) = c_1 e^{-\lambda t} + CU_0$$

und beschreibt von beliebigen Startpunkten aus ein exponentielles Abklingen auf die asymptotische Ladung CU_0 (s. Bild).



Wir zeigen die Lösungen der Differentialgleichung zusammen mit ihrem **Richtungsfeld**. (Maple: **DEplot**). Das Richtungsfeld zeigt für jeden Punkt (x,y) die Steigung, die die DGL an dieser Stelle hat, also die rechte Seite der nach Q'(t) aufgelösten DGL:




```
C:=1: U0:=5: lambda:=-1:
DGL:=diff(q(t),t)-lambda*q(t)=C*U0;
# initial values for special solutions (blue):
ivs := [q(0)=10,q(0)=0,q(0)=-5]:
DEtools[DEplot](DGL,q(t),t=0..5,ivs,linecolor=blue);
```

Beispiel 2: (Erzwungene Schwingung). Wir spezialisieren die allgemeine Gleichung (§§) aus Kap. 13.3.2 für einen Schwingkreis auf den Fall „äußere Wechselspannung" $U(t)=U_0\cos(\omega t)$

$$Q''(t)+\frac{R}{L}Q'(t)+\frac{1}{LC}Q(t)=\frac{U_0\cos(\omega t)}{L}$$

Wenn das Störglied eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω ist, dann ist es plausibel, einen Ansatz mit gleicher Schwingung zu versuchen. Der Rechenweg wird **wesentlich** einfacher, wenn wir mit „Komplexifizierung" dieser Gleichung und komplexem Ansatz $Q_p(t)$ rechnen und nachher von der Lösung nur den Realteil nehmen:

$$Q''(t)+2\delta Q'(t)+\omega_0{}^2Q(t)=K_0e^{i\omega t}$$

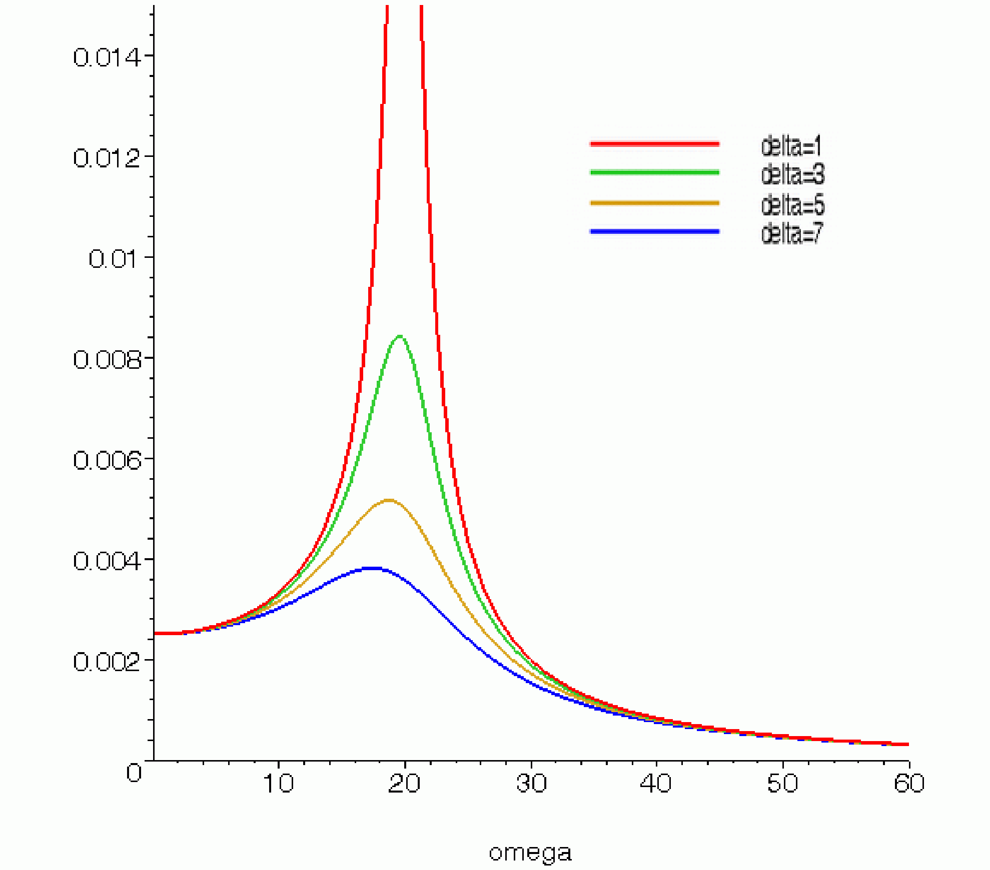
$$Q_p(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$$

(mit $K_0=U_0/L$, $2\delta=R/L$ und $\omega_0^2=1/(LC)$)
Weiterer Rechenweg mit Herleitung Resonanzkatastrophe in Vorlesung.

Das Ergebnis dieser Rechnung ist, dass die Amplitude A, die sich bei der partikulären Lösung als Funktion der Erregungsfrequenz ω und der Dämpfung δ einstellt, um die Eigenfrequenz ω_0 herum einen mehr oder weniger ausgeprägten Peak hat.

$$A = \frac{K_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Wenn die Dämpfung δ zu schwach ist, wächst der Peak äußerst stark, und es kommt zur sogenannten Resonanzkatastrophe (das, was Brücken zum Einsturz und Kräne zum Umsturz bringt … womit sich der Kreis schließt und wir das einleitende Beispiel mathematisch ergründet haben.)



Das Fazit für Bauingenieure und Maschinenbauer: man baue in seine Brücke / seinen Kran geeignete **Dämpfungselemente** ein, sonst wird sie/er einstürzen.

Diese „Weisheit" überträgt sich auch nahtlos auf InformatikerInnen, die im Bereich Game Physics tätig sind und physikalische Objekte in der Spiel- oder Simulationswelt entwerfen: Um zu verhindern, dass diese Objekte durch äußere oder numerische Störungen zu Schwingungen angeregt werden und „zerplatzen", ist es wichtig, dass man genügend Dämpfung ins Spiel bringt.

13.4. Fazit Differentialgleichungen

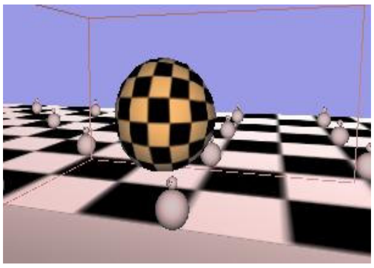
Was hängenbleiben sollte:

- die Typisierung von DGLs: **explizit / implizit, (in-)homogen, (nicht-)linear**.
- Homogene lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten löst man mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbf{C}$. und kann damit eine Reihe von DGLs aus ganz verschiedenen Anwendungsbereichen einheitlich lösen („ONE SIZE FITS ALL")
- Mehrer Lösungen einer homogenen linearen DGL lassen sich linear superponieren.
- Für eine explizite DGL n. Ordnung braucht man n Anfangsbedingungen, dann kann man das Anfangswertproblem immer eindeutig lösen (**Satz v. Picard-Lindelöf**).
- Die Lösung einer **inhomogenen linearen DGL** hat immer die Struktur $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, worin x_h eine Lösung der homogenen DGL ist und x_p eine partikuläre inhomogene Lösung.

13.4.1. Where to go from here

Dies war nur eine sehr kurze Einführung in das faszinierende und wichtige Gebiet der Differentialgleichungen. Einige weiterführende Vertiefungen:

- Wir haben hier nur gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt, das sind solche, bei denen die gesuchte Funktion y(t) nur eine Veränderliche hat und nur gewöhnliche Ableitungen auftreten. Es gibt dahinter noch die große und komplexe Welt der **partiellen DGLs** (Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung >> s. Physik-Vorlesung bei Prof. Koch), bei denen eine Funktion u(x,t) von mehreren Parametern abhängig ist und die DGL partielle Ableitungen enthält.
- DGLs spielen eine zentrale Rolle bei Modellierung und Simulation. Anwendung in der Informatik z.B. in Game Physics, der physikalischen Modellierung in Computerspielen [Bild]. Wer hier mehr lernen will: **WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme** (W. Konen)



- Viele DGLs lassen sich nur schwer analytisch lösen. Hier kommt **Maple** ins Spiel, das besonders stark darin ist, solche analytischen Lösungen zu finden.
- Manche (viele) DGLs lassen sich gar nicht analytisch lösen. Diese werden dann numerisch gelöst, z.B. **Runge-Kutta-Verfahren**. Eine Einführung zu einfachen numerischen Lösungsverfahren gibt **WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme**.
- Ein weiteres Feld sind **Systeme von DGLs**. Beispiel **Crashtest**: Ein Fahrzeug wird in ein Netz von 10000 oder mehr einzelne Punkten zerlegt, deren DGLs simultan (meist numerisch) gelöst werden.
- Wieso ist es trotzdem wichtig, einfache DGLs (wie hier z.B. lineare DGLs) analytisch zu lösen? – Weil sich viele komplizierte DGLs in der Nähe **stationärer Punkte** (nahe an einem Ruhezustand) **linearisieren** lassen und dann wichtige Teilasbpekte in dieser Näherung analytisch <u>verstanden</u> werden können. Über den analytischen Weg gelangt man oft zu einer tieferen <u>Einsicht</u> in die Zusammenhänge.

Womit wir wieder am Anfang wären (s. Start von Kap. 8):

Das Ziel des Rechnens ist <u>Einsicht</u>, nicht Zahlen.
[Richard Hamming, 1915-1998]