Bereiten Sie die Aufgaben für den 06.04.2009 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Übungsblatt 7 Funktionen mehrerer Variablen

Aufgabe 7.1 Höhere partielle Ableitungen

Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von

(a) $z(a,\phi) = a\cos^2(\phi)$ (b) $f(r,s) = e^{s^2+rs}$

(c) $g(x,y,z) = \ln(x^2yz^2) + \frac{x+y}{z^2} + xy^2z^3$

(Die stetige Differenzierbarkeit aller Funktionen sei vorausgesetzt.)

Aufgabe 7.2 Kleinste Quadrate

Durch die n=3 Messpunkte

x_i	1	4	6
y_i	2	4	8

ist eine optimale Funktion vom Typ $y = f(x) = k\,2^{bx}$ zu legen.

Hinweis: man logarithmiere die Werte, $z_i = \mathrm{ld}(y_i)$, und entsprechend auch die Funktion f !

Zeichnen Sie Ihr Ergebnis, sowohl im logarithmierten Raum, als auch im Ursprungsraum.

Aufgabe 7.3 Gradient und Tangentialebene

Gegeben seien die Funktionen $f(x,y) = y/x^2 + x^2 y - 3xy$.

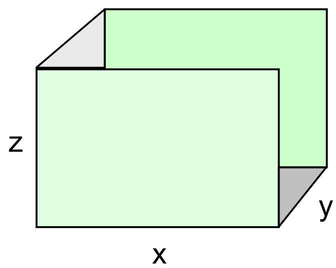
a) Man gebe für f die Tangentialebene und den Gradienten im Punkt $\mathbf{x}_o = (1,1)$ an.

b)$^+$ Man überprüfe für die Funktion $f(x,y)$, dass der Gradient <u>überall</u> auf den Höhenlinien senkrecht steht.

Hinweis: Schreibe die Linien konstanter Höhe als Bahnkurven $(x(t),y(t))^T$ und differenziere (führt auf Tangentialvektor). Multipliziere nun mit dem Gradienten.

Aufgabe 7.4 Extrema

(a) Ein quaderförmiges Profil, das an 2 Seiten offen ist (s. Zeichnung) umschließt ein Volumen V ("Bounding Volume"). Wie müssen die Seitenlängen x, y und z gewählt werden, damit der Materialverbrauch für die



Flächen minimal ist? Welche Werte ergeben sich für V=16?

(b) Die Studentin Lara will unbedingt die nächste Klausur in Mathematik bestehen. Hierzu muss sie ihren Wissensstand W verbessern. Ihr Wissensstand W ist eine Funktion der Anzahl t der Lerntage und der Menge d (in g) einer von ihr konsumierten Wunderdroge. Es gilt:

$$W = W(d,t) = 200 + 8d^2 + 6t - \tfrac{1}{3}d^3 - 0.5t^2$$

Wie soll Lara ihre Lernzeit und die Wunderdroge einsetzen, damit ihr Wissensstand beweisbar maximal wird? Welchen Wissensstand erreicht sie dann?

[Hinweis: Sie müssen nur das richtige lokale Optimum finden, die Ränder brauchen Sie nicht zu betrachten!]

Zeigen Sie jeweils, dass Ihre Lösung ein lokales Minimum darstellt. Können Sie bei (a) und (b) mit Satz S8-4 auch etwas über das globale Minimum aussagen?

Aufgabe 7.5 Linearisierung einer Funktion

Füllen Sie die nachfolgenden Tabellen aus, indem Sie die Funktionen in $(x_0, y_0) = (0{,}0)$ linearisieren:

(a) $$f(x,y) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + (x+5)\sin(y)$$

f(x,y)		y: -0.1	y: 0.0	y: 0.1
x	-0.1			
	0.0			
	0.1			

(b) $$g(x,y) = \left(1 + \int_0^x \exp(-(s-2)^2)\,ds\right)\left(2 + \int_0^y \exp((t-1)^2)\,dt\right)$$

g(x,y)		y: -0.1	y: 0.0	y: 0.1
x	-0.1			
	0.0			
	0.1			

Vergleichen Sie Ihrer Näherungslösung jeweils mit der exakten Lösung, wenn Sie f und g numerisch an den Tabellenpunkten in Maple ausrechnen.

BEACHTE: **Ohne** Linearisierung könnte man analytisch NICHTS ausrechnen, **mit** Linearisierung entsteht eine ziemlich gute Näherung!!

Bereiten Sie die Aufgaben für den 06.04.2009 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 7.6 Kurvendiskussion

Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a die folgende Funktion Minima, Maxima oder Sattelpunkte besitzt (und wo):

$$f(x,y) = -x^3 + 6axy - y^3 \quad (a \neq 0)$$

Aufgabe 7.7 Lagrange-Multiplikator 1

Lösen Sie Aufgabe 7.4(a) mit der Methode von Lagrange.

Aufgabe 7.8 Lagrange-Multiplikator 2

Gegeben sei der Punkt P = (x,y) = (2,2). Wo liegen die Punkte auf der durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ definierten Ellipse, die den kleinsten bzw. größten Abstand zu P haben?

Hinweis: Sie können sich die Rechnung ganz wesentlich erleichtern, wenn Sie beachten, dass d^2 die gleichen Extrempunkte hat wie d (!!)

Machen Sie sich durch eine Zeichnung klar, welches Extremum das Minimum und welches das Maximum darstellt.