Übungsblatt 7 Funktionen mehrerer Variablen

Aufgabe 7.0 Höhenlinien

Erstellen Sie ein Höhenliniendiagramm (durch handschriftliche Rechnung, nicht mit Maple!) für nachfolgende Funktionen. Wählen Sie dabei geeignete Höhenwerte aus.

(a) $f(x,y) = 2xy$ (b) $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$

Vergleichen Sie anschließend Ihre Diagramm-Ergebnisse mit Maple!

Hinweis zu (b) Die Kreisgleichung für einen Kreis mit Radius r am Punkt (x_0,y_0) lautet:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Versuchen Sie, auf diese Gleichung zu kommen!

Aufgabe 7.1 Höhere partielle Ableitungen

Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von

(a) $z(t,\phi) = \sin(at + \phi)$ (b) $f(x,y) = e^{xy^2}$

(c) $g(x,y,z) = x^2yz + \dfrac{x+z}{y} + \ln(xyz)$

(Die stetige Differenzierbarkeit aller Funktionen sei vorausgesetzt.)

Aufgabe 7.2 Extrema, Sattelpunkte

Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a die folgende Funktion Minima, Maxima oder Sattelpunkte besitzt (und wo):

$$f(x,y) = -x^3 + 6axy - y^3 \quad (a \neq 0)$$

Aufgabe 7.3 Kleinste Quadrate I

a) Durch die n=3 Messpunkte

x_i	1	4	6
y_i	2	4	8

ist eine optimale Funktion vom Typ

$$y = f(x) = k\, 2^{bx}$$

zu legen.

Hinweis: man logarithmiere die Werte, $z_i = \mathrm{ld}(y_i)$, und entsprechend auch die Funktion f.

b) Zeichnen Sie Ihr Ergebnis, sowohl im logarithmierten Raum, als auch im Ursprungsraum.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 19.04.2010 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 7.4 Kettenregel

Durch $z = f(x, y)$ ist eine Fläche gegeben. Mit der Parametrierung $x = x(t), y = y(t)$ wählen wir eine Kurve auf dieser Fläche aus. Anschaulich: $(x(t), y(t))$ beschreibt die Bahnkurve einer Figur in einer Computeranimation, die sich im Zeitverlauf t auf der Fläche bewegt.

(a) $z = e^{xy}$ mit $x = t^2, y = t$

(b) $z = x \ln y$ mit $x = \sin(t), y = \cos(t)$

(c) $z = x^2 \sin(2y)$ mit $x = t^2, y = t^3$

Bestimmen Sie für (a)-(c):

- den Definitionsbereich von $z = f(x, y)$;
- die Ableitung der Funktion z nach der Zeit t auf zwei Arten: (i) mittels Verwendung der Kettenregel bzw. (ii) nach Einsetzen der Parametrierung in die Funktionsgleichung und überzeugen Sie sich, dass mit beiden Methoden dasselbe herauskommt;
- die Zeiten t und Stellen (x,y) , zu/an denen die Figur die Steiggeschwindigkeit $\dot{z}(t) = 0$ hat.

  Hinweise: Betrachten Sie hierzu bei (b) Ihre Gleichung als Funktion von C=cos(t), d.h. eliminieren Sie sin(t). Bei (c) kann man eine transzendente Gleichung leicht graphisch lösen.

Aufgabe 7.5 Tangentialebene und Gradient

Gegeben seien die Funktionen $f(x,y) = y/x^2$ und $g(x,y)= x^2 y -6xy + x^2 - 6x + 8y^2$.

a) Man gebe für f und g die Tangentialebene und den Gradienten im Punkt $\mathbf{x}_0= (1,1)$ an.

b) Berechnen Sie über die totalen Differentiale df und dg, welche Änderung in den Tangentialebenen sich jeweils ergibt, wenn man zum Punkt $\mathbf{x}_1= (1.1, 0.8)$ übergeht. Stellen Sie diesen Näherungswerten die exakten Funktionsdifferenzen $\Delta f = f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_0)$ und Δg gegenüber.

c)$^+$ Man überprüfe für die Funktion $f(x,y)$, dass der Gradient <u>überall</u> auf den Höhenlinien senkrecht steht.

Hinweis: Schreibe die Linien konstanter Höhe als Bahnkurven $(x(t),y(t))^T$ und differenziere (führt auf Tangentialvektor). Multipliziere nun mit dem Gradienten.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 19.04.2010 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 7.6 Lagrange-Multiplikator 1

Wo liegen die Extrema von $Z(x,y) = x+2y$, wenn die Nebenbedingung $x^2+y^2=5^2$ einzuhalten ist?

(a) Lösen Sie die Aufgabe über Eliminierung einer Variablen

(b) Lösen Sie die Aufgabe mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren

(c) Probe: Es sollte dasselbe herauskommen. Stimmt's? Welche Methode ist einfacher?

(d) (+) Können Sie die Aufgabe auch graphisch lösen, fast ohne Rechnen?

Aufgabe 7.7 Lagrange-Multiplikator 2

Die Scheitelpunkte einer Ellipse sind diejenigen Punkte, deren Entfernung $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt am größten bzw. am kleinsten ist. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ definierten Ellipse, deren Mittelpunkt ja im Nullpunkt liegt, mit der Methode von Lagrange.

Hinweis: Sie können sich die Rechnung ganz wesentlich erleichtern, wenn Sie beachten, dass d^2 die gleichen Extrempunkte hat wie d (!!)