Übungsblatt 8 Graphen

Aufgabe 8.1 Eigenschaften Graphen

Ein Graph heißt **planar**, wenn es eine Zeichnung von ihm ohne Kantenkreuzungen gibt.

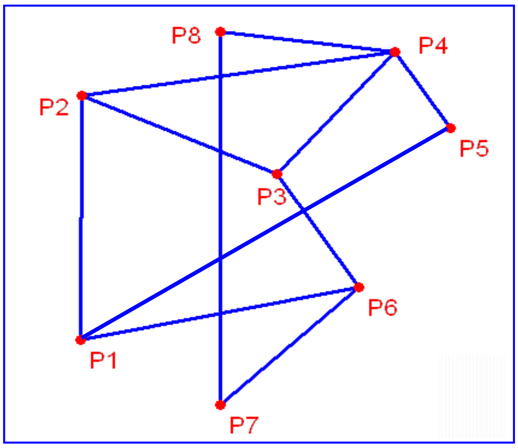
Gegeben sei nebenstehender (Multi)Graph.

a) Ist der Graph planar ?

b) Ist es ein Graph oder Multigraph?

c) Ist der Graph vollständig ?

d) Ändern Sie den Graphen jeweils so ab, dass die Fragen b) und c) jeweils gegenteilig beantwortet werden müssen.



Aufgabe 8.2 Adjazenzmatrix

Gegeben sind die Adjazenzmatrizen A_1 und A_2 (unbewertete Graphen). Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen. Kann man die Graphen als planare Graphen, also kreuzungsfrei, zeichnen?

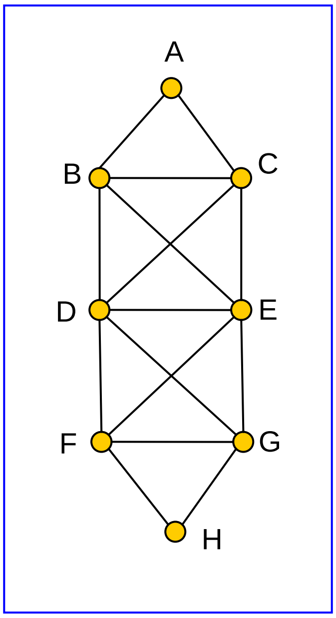
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.3 Euler-Züge

Ein Eulerzug wurde in Def D 9-9 definiert. Ein **offener Eulerzug** ist eine Kantenfolge, die jede Kante genau einmal besucht, aber nicht an ihren Ausgangspunkt zurückkehrt.

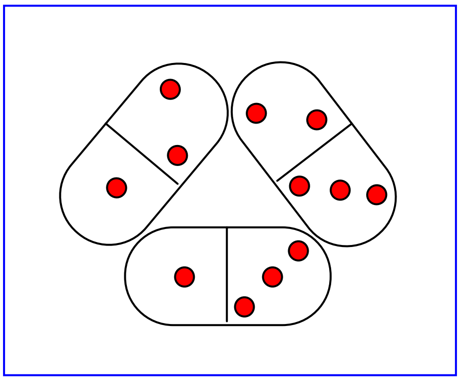
(a) Schreiben Sie zu nebenstehendem Graphen "Doppeltes Haus vom Nikolaus" die Adjazenzmatrizen für die Subgraphen {B,C,D,E} und { B,C,D,E,F,G} auf.

(b) Besitzt der Graph Eulerzüge oder offene Eulerzüge? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! Geben Sie fallweise je ein Beispiel für solche Züge an.



Bereiten Sie die Aufgaben für den 10.05.2010 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 8.4 Dominospiel (+)



(a) Für welche n läßt sich das n-Dominospiel als geschlossene Dominokette auslegen? Im n-Dominospiel gibt es für jedes Paar (p,q) mit p<q und p,q $\in\{1,...,n\}$ genau einen Dominostein, die Pasch-Steine lassen wir weg, da hier irrelevant. Bei einer gültigen Dominokette zeigen die aneinanderliegenden Hälften zweier Dominosteine immer dieselbe Zahl (s. Bild).

Hinweis: Überlegen Sie, wie sich das Problem als Graph formulieren läßt.

(b) Geben Sie eine Dominoketten-Konstruktionsvorschrift für jedes n an, für das nach (a) eine Lösung existiert! Schreiben Sie Dominoketten, die sich nach dieser Vorschrift ergeben, konkret für n=5 und n=7 auf.

Aufgabe 8.5 Aufspannende Bäume

Zeichnen Sie den Graphen aus Aufgabe 8.1 in möglichst "hübscher" Form (d.h. möglichst überschneidungsfrei und mit möglichst kurzen Kanten).

Für diesen Graphen aus Aufgabe 8.1 führen wir Kantenbewertungen ein: (a) die Summe der angrenzenden Knotennummern (z.B. hat die Kante zwischen Knoten P2 und P3 die Bewertung 2+3=5) bzw (b) die Differenz "groß – klein" (d.h. die Kante zwischen Knoten P1 und P6 hat die Bewertung 6-1=5) .

1. Geben Sie für die so bewerteten Graphen je einen minimalen aufspannenden Baum nach dem Algorithmus von Kruskal an.
2. Geben Sie für den Graphen nach (a) den aufspannenden Baum für Tiefensuche ab Knoten P3 sowie für Breitensuche ab P3. Nehmen Sie jeweils die kleinste Knotennummer, wenn mehrere Knoten möglich sind.
3. In was unterscheidet sich der Tiefensuche-/Breitensuche-Baum, wenn man die Graphenbewertung aus (b) zugrundelegt? Welcher der in Aufgabe 8.5 entwickelten aufspannenden Bäume hat die wenigsten Kanten? Begründen Sie!

Aufgabe 8.6 Party

Ist es möglich, dass sich auf einer Party 9 Personen befinden, von denen jede genau 5 andere kennt?

Können Sie allgemein angeben, wann der Satz *"N Personen kennen jeder genau k andere Personen"* stimmen kann bzw. nicht stimmen kann?

Aufgabe 8.7 Huffman und Präfixcodes

<u>**Info-Teil:**</u> [nach Hartmann04, S. 213-215]

Motivation: Eine Telefonnummer besteht aus mehreren Ziffern, ein Zeichen aus mehreren Bits. Woher weiss die Telefonvermittlung eigentlich, wann ich meine Telefonnummer fertig gewählt habe? Weiter: Wie kann ich als Sender eine Folge von Zeichen so in einem Bit-Datenstrom übertragen, dass der Empfänger die Zeichen auch wieder trennen kann?

Mögliche Antwort 1: Feste Zeichenlänge vereinbaren. Ist nicht so bei Tel.Nr. (man denke an Notruf 110). Ist auch nicht gut erweiterbar.

Antwort 2: Man verwende Präfixcodes.

Definition: Ein **Präfixcode** ist ein Code, in dem kein Codewort Anfangsteil eines anderen Codewortes ist.

Das TelefonNr.-System ist ein Präfixcode.

Das Morsealphabet ist kein Präfixcode, denn E="." ist Anfangsteil von A=".-".

Jeder Präfixcode läßt sich als binärer Wurzelbaum darstellen, mit den Zeichen als Blätter.

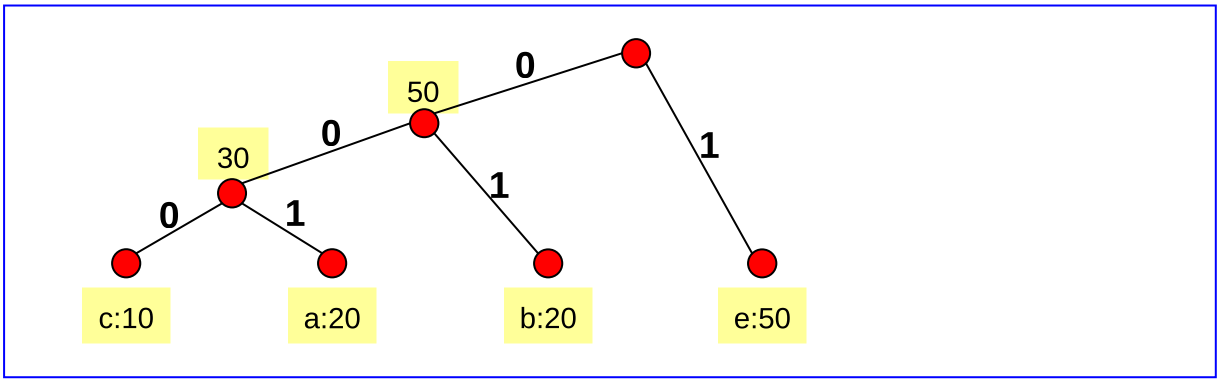
Gegeben ein Datenstrom, in dem verschiedene Zeichen mit verschiedenen Häufigkeiten vorkommen, z.B. a: 20%, b: 20%, c: 10%, e: 50%

Gesucht: Ein Code, der den Datenstrom als Bitstrom optimaler Länge überträgt.

Der **Huffman-Algorithmus** ordnet jedem Zeichen einen solchen Präfixcode zu:

1. Starte mit Menge B = Menge aller Zeichen
2. Suche in B die zwei Knoten mit den kleinsten Häufigkeiten und verbinde sie zu Teilbaum. Ordne dem Vaterknoten die Summe der Häufigkeiten zu.
3. Ersetze in B die zwei Knoten durch ihren Vaterknoten. Weiter bei 2., solange bis B nur noch 1 Element enthält (die Wurzel des Baumes).
4. Beschrifte im Baum jeden linken Ast mit 0, jeden rechten Ast mit 1. Das Codewort eines Blattes ist die von der Wurzel aus ablesbare Bitfolge.

Im Beispiel entsteht so folgender Baum, der z.B. a das Codewort **001** zuordnet:



Aufgaben-Teil:

(a) Sind die nachfolgenden Codes (i) und (ii) Präfixcodes? Wenn ja, zeichnen Sie den zugehörigen Binärbaum.

(i) a=11, b=1010, c=1011, d=1000, e=01, f=001, g=000

(ii) a=00, b=010, c=011, d=10, e=110, f=111, g=0110, h=0111

(b) Für jeden Code aus (a), der ein Präfixcode ist, entschlüssele man den folgenden Bitstrom in seine Zeichen:

0000101011110000011010101111 01

(c) Konstruieren Sie den Huffman-Code für das Alphabet {a,b,c,d,e,f,g,h} mit der Häufigkeitsverteilung {4,6,7,8,10,15,20,30} (also a: 4%, b: 6%, usw...).