

Übungsblatt 11

Komplexe Zahlen und Differentialgleichungen

Aufgabe 11.1

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1=9-7i \quad \text{und} \quad z_2=3+2i$$

Berechnen Sie :

$$z_1 + z_2 \quad z_1 - z_2 \quad z_1 \cdot z_2 \quad z_1 : z_2 \quad \bar{z}_1 \cdot z_2 \quad \bar{z}_2 : z_1$$

Aufgabe 11.2

Berechnen Sie und geben Sie das Ergebnis in Normalform (=kartesische Form) an:

a) $i \cdot \sqrt{x^2} \cdot i \cdot \sqrt{y^2}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

b) $(-i)^{18}$

c) $-i^{17}$

d) $\frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^7}$

e) $(2\sqrt{3} - 3i\sqrt{2})^2$

Aufgabe 11.3

Seien $z, z' \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) $(\operatorname{Re}(z \cdot z'))^2 + (\operatorname{Im}(z \cdot z'))^2 = |z|^2 |z'|^2$

b) $2 \operatorname{Re}(zz') = z\bar{z}' + z'\bar{z}$

Aufgabe 11.7

Berechnen Sie folgende Potenzen und geben Sie das Ergebnis in der Normalform an:

a) $(1 + \sqrt{3}i)^{15}$ b) $(3 + 4i)^3$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^5$

Aufgabe 11.8

Berechnen Sie folgende Wurzeln:

a) $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[3]{3 - \sqrt{3}i}$ c) $\sqrt[6]{i}$ d) $\sqrt[3]{81e^{-i190^\circ}}$

Aufgabe 11.9

Gegeben sind folgende komplexe Zahlen in Normalform (=kartesische Form) :
(\bar{z} ist die zu z konjugiert komplexe Zahl, i ist die imaginäre Einheit)

$$z_1 = -4 - 3i \quad z_2 = 3 + \sqrt{3}i \quad z_3 = 4 - 2i$$

Berechnen Sie: $\frac{z_1^3 \cdot \bar{z}_2^{-4}}{\sqrt{z_3}}$ und geben Sie die Ergebnisse wieder in Normalform (=kartesische Form) an.

Aufgabe 11.10

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Menge der komplexen Zahlen:

a) $z^4 = 1 - i$ b) $z^5 = \cos 225^\circ + i \sin 225^\circ$

Aufgabe 11.11

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lösen Sie diese DGL mit Hilfe der isoklinen Methode.

Aufgabe 11.12

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen Differentialgleichung 1.Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie, eine Lösungskurve einzuzeichnen. Können Sie eine Aussage darüber machen, wie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet?

a) $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$, $x > 0$

b) $y' = y$

Aufgabe 11.13

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen:

a) $x^2 \cdot y' = y^2$ b) $y' \cdot (\sin y) = -x$

Aufgabe 11.14

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen:

a) $y' + (\cos x) \cdot y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ b) $y^2 \cdot y' + x^2 = 1$, $y(2) = 1$ c) $y \cdot y' = 2e^{2x}$, $y(0) = 2$

Aufgabe 11.15

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung:

a) $y' + 4y = 0$

b) $y' = y \cdot \sin x$