Übungsblatt 12

Komplexe Zahlen und Differentialgleichungen

Aufgabe 12.1

Gegeben sind die komplexen Zahlen in der kartesischen Form (Normalform)

$$\text{a) } z_1=9-7i \quad z_2=3+2i \qquad \text{b) } z_1=4/3+1/2i \quad z_2=4/3-1/2i$$

Berechnen Sie :

$$z_1 + z_2 \quad z_1 - z_2 \quad z_1 \cdot z_2 \quad z_1 : z_2 \quad \bar{z}_1 \cdot z_2 \quad \bar{z}_2 : z_1$$

jeweils für die Werte aus a) und b) mit den Rechenregeln in der kartesischen Form.

Aufgabe 12.2

Berechnen Sie und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form (Normalform)an:

$$\text{a) } i \cdot \sqrt{x^2} \cdot i \cdot \sqrt{y^2} \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \qquad \text{b) } (-i)^{18} \qquad \text{c) } -i^{17}$$

$$\text{d) } \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^7} \qquad \text{e) } (2\sqrt{3} - 3i\sqrt{2})^2$$

Aufgabe 12.3

Berechnen Sie die folgenden Quotienten, indem Sie den Nenner reell machen:

$$\text{a) } \frac{5}{1-2i} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} - i\sqrt{2}} \qquad \text{c) } \frac{3i}{2 + 5i\sqrt{2}}$$

Aufgabe 12.4

Seien $z, z' \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) $(\operatorname{Re}(z \cdot z'))^2 + (\operatorname{Im}(z \cdot z'))^2 = |z|^2 |z'|^2$

b) $2 \operatorname{Re}(zz') = z\bar{z}' + z'\bar{z}$

Aufgabe 12.5

Berechnen Sie:

a) $\frac{4+3i}{3+4i}$ b) $\operatorname{Re} \left((2+2i) \left(1 - \frac{|3-3j|}{3} i \right) \right)$ c) $\left| \frac{5+5i}{1-3i} \right|$

Aufgabe 12.6

Bilden Sie jeweils aus den folgenden Angaben die kartesische Form (Normalform), die trigonometrische und die Exponentialform der komplexen Zahl:

a) $z = -3i$

b) $z = 8$

c) $r = 3, \varphi = \pi/2$

d) $r = 8, \varphi = -\pi$

e) $\operatorname{Re} z = 3, \operatorname{Im} z = 5$

f) $z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$

g) $z = e^{-3i\pi}$

Aufgabe 12.7

Berechnen Sie folgende Potenzen und geben Sie das Ergebnis in der Normalform an:

a) $(1 + \sqrt{3}i)^{15}$

b) $(3 + 4i)^3$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3} \right)^5$

Aufgabe 12.8

Berechnen Sie folgende Wurzeln:

a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[3]{3-\sqrt{3}i}$ c) $\sqrt[6]{i}$ d) $\sqrt[3]{81e^{-i190^\circ}}$

Aufgabe 12.9

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Menge der komplexen Zahlen:

a) $z^4 = 1 - i$ b) $z^5 = \cos 225^\circ + i \sin 225^\circ$

Aufgabe 12.10

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lösen Sie diese DGL mit Hilfe der isoklinen Methode.

Aufgabe 12.11

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen:

a) $x^2 \cdot y' = y^2$ b) $y' \cdot (\sin y) = -x$

Aufgabe 12.12

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen:

a) $y' + (\cos x) \cdot y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ b) $y^2 \cdot y' + x^2 = 1, y(2) = 1$ c) $y \cdot y' = 2e^{2x}, y(0) = 2$