Das bestimmte Integral

Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

heißt, falls er vorhanden ist, das bestimmte Integral der Funktion f(x) in den Grenzen a bis b und wird wie folgt geschrieben:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Das unbestimmte Integral

F(x) heißt Stammfunktion von f(x)

Die Menge aller Stammfunktionen heißt das unbestimmte Ingegral

Schreibweise:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c$$

Das unbestimmte Integral

Folgerung:

$$\text{Es ist} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln

Partielle Integration,
Produktintegration

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Integrationsregeln

Integration durch Substitution

$$\int f(\cdot g(x))\cdot g'(x)\ dx = \int f(z))\ dz$$

mit z=g(x)

Integralrechnung

Anwendungen:

Flächenberechnung
Berechnung von Rotationsvolumina

Integralrechnung - Beispielaufgaben

Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Integrationsmethode:

a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_{0}^{\pi/4} 4t \cdot \cos(2t) dt$

Beschreibende Statistik

Trifft immer nur Aussagen über das konkrete Datenmaterial

Keine schließende Statistik

Maßzahlen

sind charakteristische Werte (Parameter) einer Verteilung, die einen schnelleren Vergleich ermöglichen

Lageparameter

arithmetische Mittel

Median (0,5-Quantil)

p-Quantil

Streuungsmaßzahlen

bringen die Ausbreitung oder Variabilität der gemessenen Werte zum Ausdruck :

Spannweite

Varianz

Quantile

Ein p-Quantil x_p ist dadurch charakterisiert, dass höchstens p100% der Beobachtungswerte kleiner und höchstens (1-p)100% größer als x_p sind

Boxplots

Veranschaulichen Häufigkeitsverteilungen: Es werden fünf Größen berücksichtigt: Minimum Maximum, unteres Quartil, oberes Quartil, Median

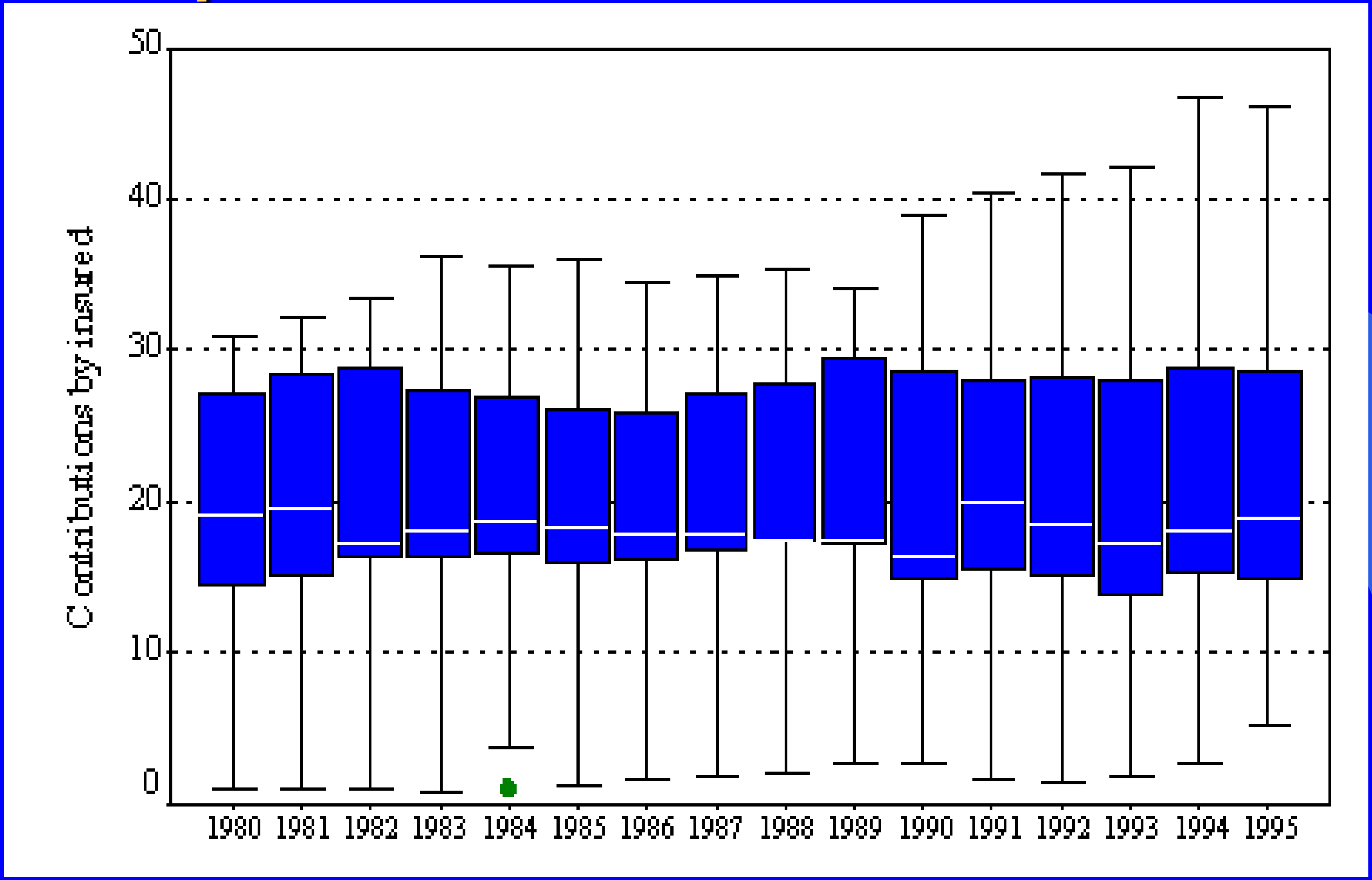
Boxplots

Mögliche Aufgabe: Datenmenge gegeben, bestimmen der notwendigen Größen

Zeichnen

Achtung: eventuell die Daten erst noch der Größe nach sortieren!

Boxplots



50
40
30
20
10
0
Contributions by insured
1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988 1989 1990 1991 1992 1993 1994 1995

Permutationen

jede Anordnung der Elemente einer Menge mit n Elementen in einer bestimmten Reihenfolge heißt *Permutation*

Für eine Menge mit n Elementen hat man n! Möglichkeiten der Anordnung

Rechenregeln für Fakultät

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Variationen ohne Wiederholung

Die Anordnung der p Objekte muss berücksichtigt werden und jedes der n Objekte kann nur einmal verwendet werden.

$$V(p,n) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Variationen mit Wiederholung

Die Anordnung der p Objekte muss berücksichtigt werden und jedes der n Objekte kann mehrmals verwendet werden.

$$\overline{V}(p,n) = n^p$$

Kombinationen ohne Wiederholung

Die Anordnung der p Objekte muss nicht berücksichtigt werden und jedes der n Objekte kann nur einmal verwendet werden.

$$C(p,n) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Kombinationen mit Wiederholung

Die Anordnung der p Objekte muss nicht berücksichtigt werden und jedes der n Objekte kann mehrmals verwendet werden.

$$\overline{C}(p,n) = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Beispielaufgabe Kombinatorik

Was ist wahrscheinlicher: Bei einer Tippreihe 6 Richtige im Lotto zu haben, oder dass ein Affe, der auf einer Computertastatur zufällig vier Tasten hintereinander anschlägt, das Wort *affe* schreibt? Die Tastatur habe 50 Tasten und man unterscheide nicht zwischen Groß- und Kleinschreibung.

Beipiele für Zufallsvariablen

Würfeln: die Augenzahl wird als Zahl zugeordnet
Würfeln mit zwei Würfeln: Augensumme

Maßzahlen einer W‘verteilung

Erwartungswert oder Mittelwert

Varianz

Standardabweichung

Spezielle Verteilungen: Binomialverteilung

**Überall da anzuwenden, wo alternative Entscheidungen (mit Wahrscheinlichkeit p und q) zu treffen sind,
bei n-maliger unabhängiger Versuchsdurchführung**

Binomialverteilung

$$b(n,p,x) := \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,\ldots,n$$

Erwartungswert und Streuung der Binomialverteilung

$E(X) = np$

$V(x) = npq = np(1-p)$

Binomialverteilung Beispielaufgabe

Eine Operation wird mit 80%igem Erfolg durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 4 der nächsten 5 Patienten die Operation erfolgreich durchgeführt wurde?

Aufgabenvarianten: …,dass mindestens…,höchstens,…,genau….

C.F. Gauss 1777-1855

Normalverteilung

Verteilungsfunktion F(x)

$$F(x) = P(-\infty < t \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Standardnormalverteilung

Durch

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

erhält man stets eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1

Standardnormalverteilung

Die Werte

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

kann man entsprechenden Tabellen entnehmen

Standardnormalverteilung

$$P(X \leq x) = f(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(u)$$

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(u)$$

Standardnormalverteilung

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Normalverteilung Beispielaufgabe

Eine Maschine packt Pakete ab, deren Füllmenge normalverteilt ist mit dem Mittelwert 248g und der Standardabweichung 4g.
Für die Lieferung akzeptiert man einen Tolenranzbereich von +/-5g.
Welcher Anteil der produzierten Pakete liegt außerhalb dieses Toleranzbereichs?

Grenzwertsatz von De Moivre Laplace

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X gilt,
falls np(1-p)>9 (Faustregel)

$$P(a \le x \le b) \approx F(b+0,5) - F(a-0,5)$$

$$= \Phi\left(\frac{b+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0,5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Normalverteilung Beispielaufgabe

Bei einer Produktion werden mit der Wahrscheinlichkeit p=3%defekte Stücke produziert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter n=500 zufällig herausgegriffenen Stücken nicht mehr als 10 defekte anzutreffen

Die komplexen Zahlen C

Zahlbereichserweiterung, so dass auch negative Wurzeln berechnet werden können

Dadurch Vereinfachungen bei Berechnungen in der Physik, Elektrotechnik, angewandten und reinen Mathematik

Die komplexen Zahlen C

Die formale Lösung der Gleichung

$x^2+1=0$ ist $\sqrt{-1}$

$$\sqrt{-1} \qquad \text{als Symbol: } i$$

Die komplexen Zahlen Polarkoordinatendarstellung

$$x = \operatorname{Re} z = r \cdot \cos \varphi \qquad 0 \leq r \leq \infty$$

$$y = \operatorname{Im} z = r \cdot \sin \varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\frac{Rez}{r} = \cos \varphi \qquad \frac{\operatorname{Im} z}{r} = \sin \varphi$$

Die komplexen Zahlen: Normalform <-> Polarkoordinatenform

$$z = x + iy \quad x = \operatorname{Re} z = r\cos\varphi$$

$$y = \operatorname{Im} z = r\sin\varphi$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\varphi \quad \text{Argument} \quad \text{von} \quad z \qquad \arg \quad z = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\text{Hauptwert}: 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\varphi + 2k\pi \quad \text{Nebenwerte}$$

Die komplexen Zahlen : Aus z=x+iy wird

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} + 2k\pi, x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + (2k+1)\pi, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x = 0, y < 0 \\ \text{unbestimmt}, x = y = 0 \end{cases}$$

Die komplexen Zahlen Exponentialform

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= re^{i\varphi}$$

Euler'sche Formel

Die komplexen Zahlen
Potenzieren in der Polarkoordinatenform

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_1^{\,2} = r_1 \cdot r_1(\cos(\varphi_1 + \varphi_1) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_1))$$

$$= r_1^{\,2}(\cos(2\varphi_1) + i\sin(2\varphi_1))$$

$$= r_1^{\,2} e^{2i\varphi_1}$$

$$z_1^{\,n} = r_1^{\,n}(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1))$$

$$= r_1^{\,n} e^{ni\varphi_1}$$

Die komplexen Zahlen – Berechnung der Wurzeln

$$z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$z^n = z_0$ besitzt die n Lösungen

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Die komplexen Zahlen – Berechnung der Wurzeln

Da alle Lösungen den gleichen Berag besitzen, liegen sie in der Gauß'schen Zahlenebene auf dem Mittelpunktskreis um 0 mit dem Radius $\sqrt[n]{r_0}$

Zu jeder Lösung gehört genau ein Winkel, angefangen mit dem n-ten Teil des Winkels φ_0 danach wird jeweils der n-te Teil von 2π addiert.

Komplexe Zahlen Beispielaufgabe

Blatt 12 Zusatzaufgabe 5

Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung (DGL)

ist eine Gleichung, die außer einer unbekannten Funktion als unabhängige Variable noch deren Ableitungen bis zu n-ten Ordnung enthält.

Differentialgleichungen

Eine DGL, die eine Ableitung n-ter Ordnung, aber keine höheren enthält, heißt DGL n-ter Ordnung

$$y' = \frac{1}{2}x - 1 \qquad \text{DGL} \quad 1.\text{Ordnung}$$

$$y''' + 2y' = \cos x \qquad \text{DGL} \quad 3.\text{Ordnung}$$

Differentialgleichungen

Lösungen von DGL sind immer Funktionen!

Idee: Da Ableitungen verschiedener Ordnung vorkommen, muss der Lösungsweg über Integrationen laufen

Allgemeine Lösungen mit Konstanten

Differentialgleichungen

Trennung der Variablen:

Für DGL 1.Ordnung, die außer einer Ableitung von y nur Funktionen von y und x enthalten und vom folgenden Typ sind:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Differentialgleichungen

Statt y‘ schreibe man den Differentialquotienten dy/dx

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad g(y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \text{Integration auf beiden Seiten}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Differentialgleichungen
Lineare DGL's 1.Ordnung

Eine DGL 1.Ordnung heißt *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

darzustellen ist.

g(x) heißt die Störfunktion

Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1.Ordnung durch „Aufsuchen einer partikulären Lösung“

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL 1. Ordnung wird als Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer (beliebigen) partikulären Lösung (speziellen) Lösung dargestellt.

Häufiger Spezialfall: Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Störfunktion	**Lösungsansatz**
$g(x)=3x+5$	$y=a_1x+a_0$
$g(x)=7x^4-3x$	$y=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
$g(x)Ae^{bx}$	$y=\begin{cases} Ke^{bx} & b \neq -a \\ Kxe^{bx} & b = -a \end{cases}$

Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Man bildet y‘ und y“ und setzt dies in die homogene Ausgangs DGL ein:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

Aus dieser quadratischen Gleichung lässt sich λ berechnen

Differentialgleichungen Beispielaufgabe

Lösen Sie folgende DGL:

$$y' = x^2 \cdot \sqrt{y}$$

durch Trennung der Variablen

Zusätze: Anfangswert gegeben

Differenzialrechnung für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

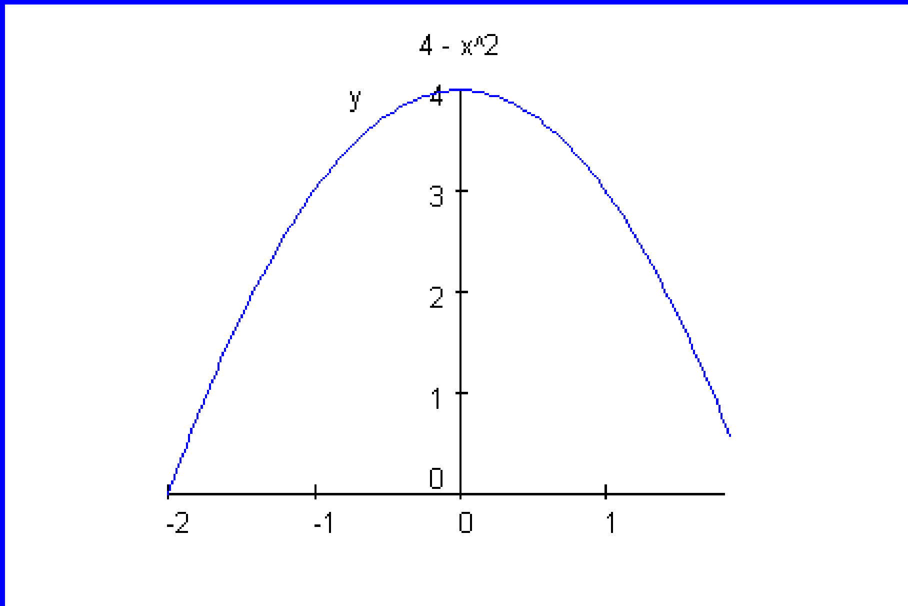
Def.: eine Funktion

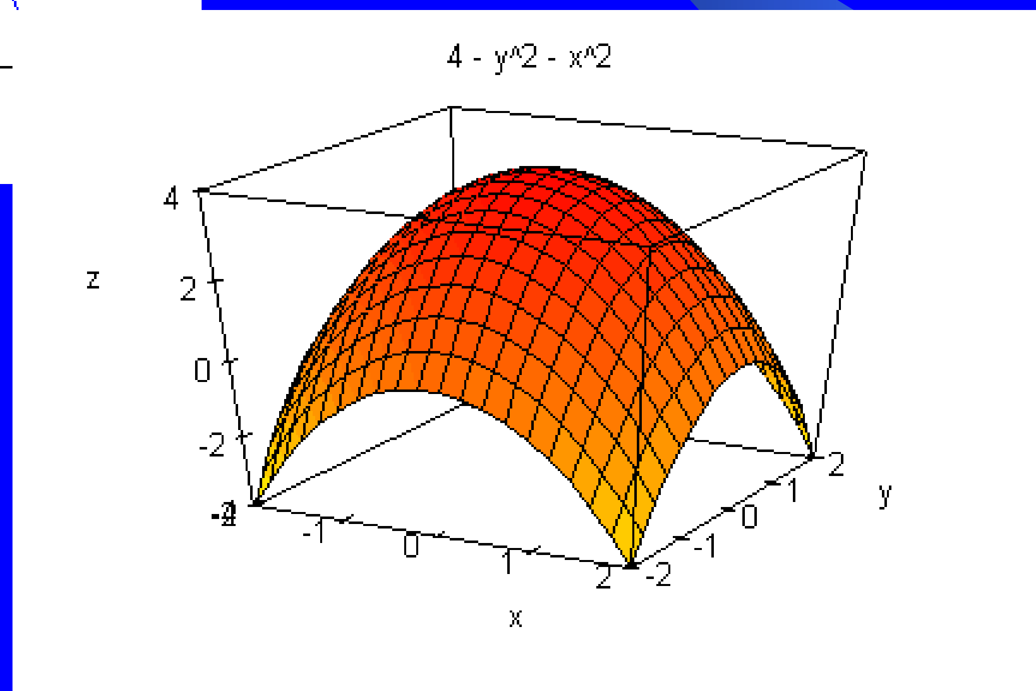
$$f: D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad D \subset \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots x_n) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

heißt eine Funktion mit n unabhängigen Variablen

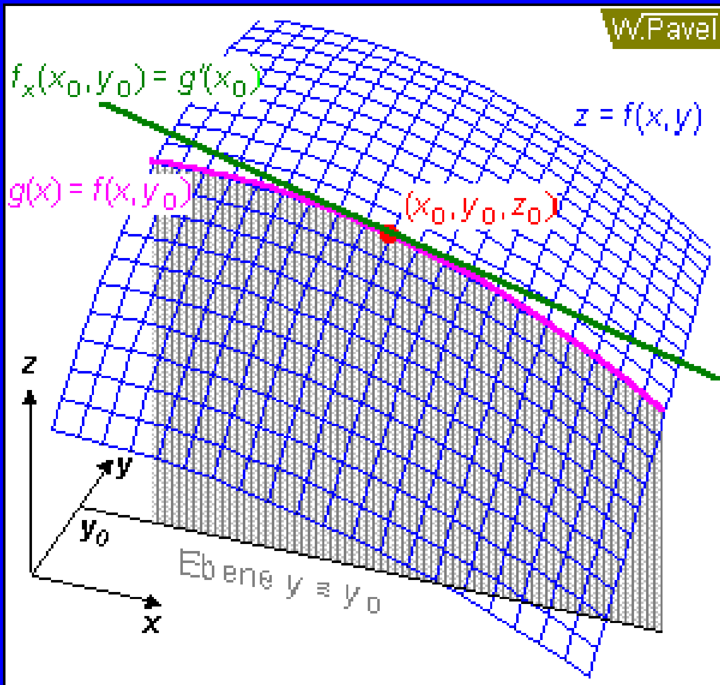
Spezialfall: n=2

Bp. Paraboloid





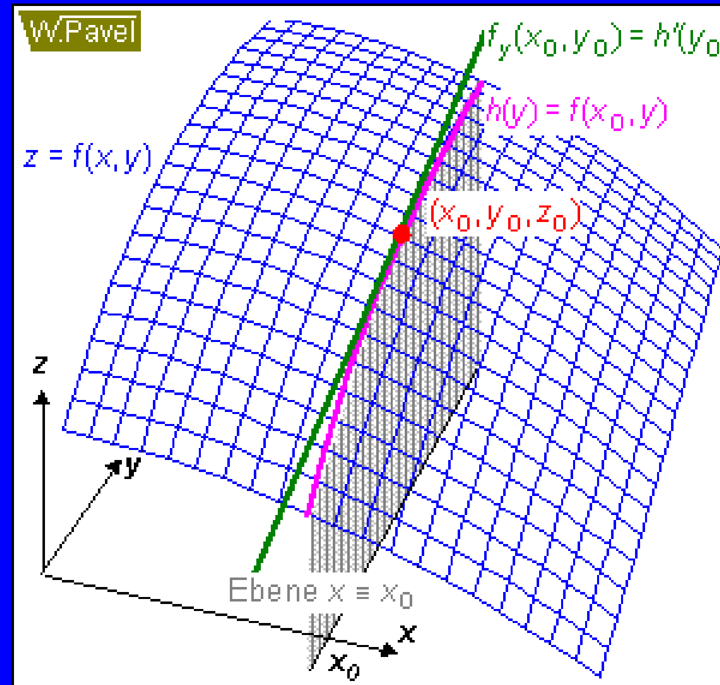
Partielle Ableitungen 1.Ordnung



Partielle Ableitung nach x der Funktion $z = f(x,y)$

im Punkt $(x,y,z) = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = g'(x_0)$ mit $g(x) = f(x,y_0)$



Partielle Ableitung nach y der Funktion $z = f(x,y)$

im Punkt $(x,y,z) = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = h'(y_0)$ mit $h(y) = f(x_0,y)$

http://bilderbuch.mathematik.uni-wuerzburg.de/themen/totdiff.htm

Partielle Ableitungen 1.Ordnung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - (x,y)}{\Delta x} = f_x(x,y)$$

Partielle Ableitung der Funktion f(x,y) nach x

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - (x,y)}{\Delta y} = f_y(x,y)$$

Partielle Ableitung der Funktion f(x,y) nach y

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)}{\Delta x_i} = f_{x_i}(x_1, \ldots x_n)$$

Partielle Ableitung der Funktion z= $f(x_1, \ldots x_n)$ nach der i-ten Variablen

Partielle Ableitungen 1.Ordnung für Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Zusammenfassung aller partiellen Ableitungen einer Funktion

$z = f(x_1,\ldots x_n)$ als Vektor:

Gradient von f

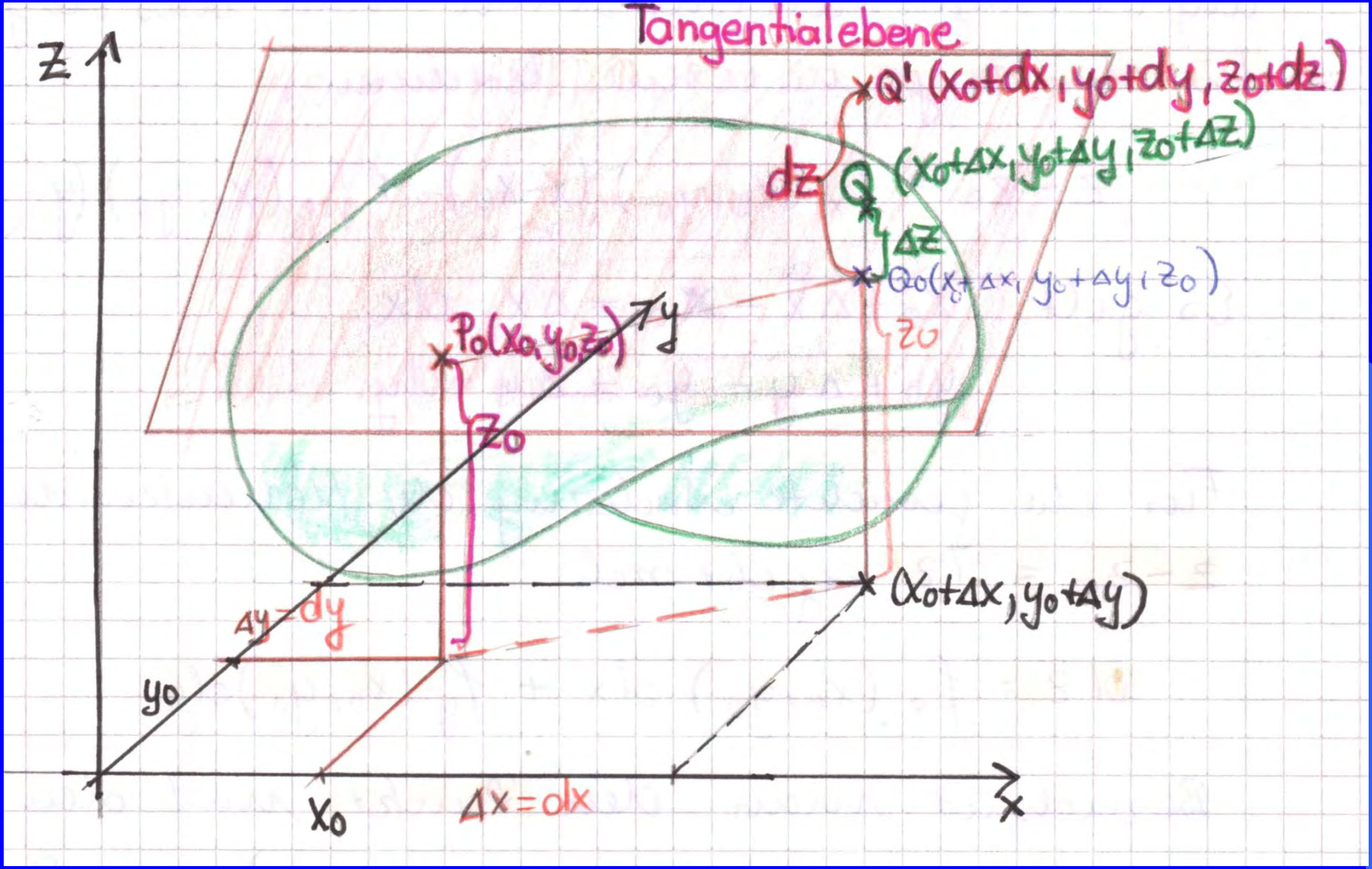
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Totales Differenzial

Fragestellung:

Wie ändert sich die Höhenkoordinate z des Punktes P bei einer Verschiebung des Punktes auf der Fläche selbst bzw. auf der zugehörigen Tangentialebene?

Totales Differenzial



Totales Differenzial

Def.: Das totale oder vollständige Differenzial einer Funktion z=f(x,y) ist der lineare Differenzialausdruck

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Totales Differenzial

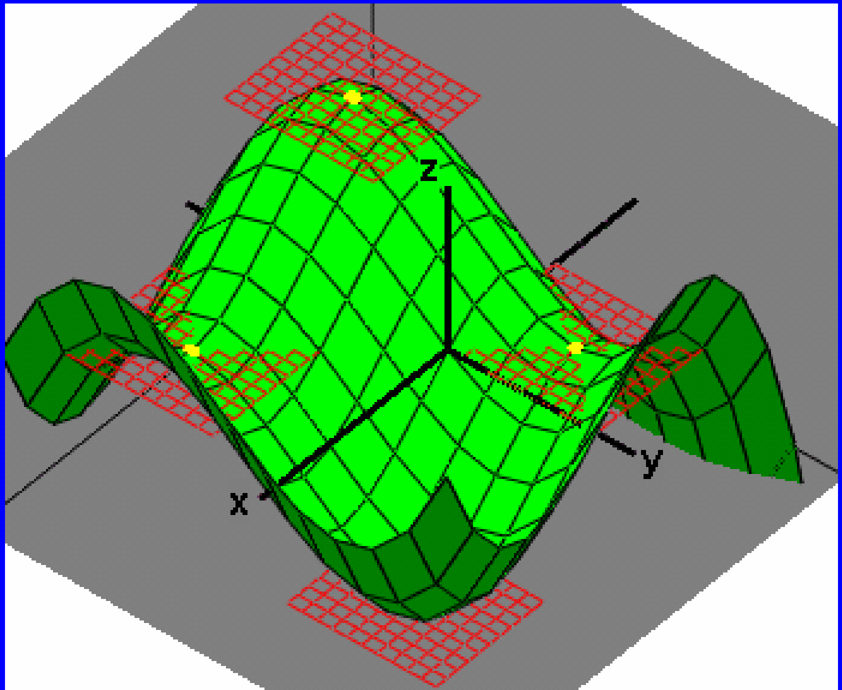
Def.: Das totale oder vollständige Differenzial einer Funktion $z=f(x_1,...x_n)$ ist der lineare Differenzialausdruck

$$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \ldots + f_{x_n} dx_n$$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

Zunächst: n=2

Notwendige Bedingung: Tangentialebene muss parallel zu x.y-Ebene verlaufen, aber: auch in den sog. Sattelpunkten verläuft die Tangentialebene „waagrecht“



Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

Hinreichende Bedingungen:

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung erfüllen folgende Ungleichungen:

$$\Delta = f_{xx}(x_o, y_o) \cdot f_{yy}(x_o, y_o) - f_{xy}{}^2(x_o, y_o) > 0$$

$$f_{xx}(x_o, y_o) < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$f_{xx}(x_o, y_o) > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit Nebenbedingungen Lösungsmöglichkeiten

Lösung mit Hilfe der Methode von Lagrange

Prinzip: aus der Zielfunktion und aus den Nebenbedingungen wird eine neue Funktion erzeugt, für die ein globaler Extremwert berechnet wird

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabhängigen Veränderlichen

$z=f(x_1,\ldots,x_n)$ Zielfunktion

$z_j=g_j(x_1,\ldots,x_n)=0$ k Nebenbedingungen

$j=1,\ldots,k$

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)$$

Lagrange-Funktion, für die das Maximum oder das Minimum berechnet werden muss

Beispielaufgaben Mehrdimensionale Analysis

Berechnen Sie mit Hilfe des Totalen Differentials für die Funktion

$$f(x,y,z) = 3x^2 - xy + 2yz + 4z^2$$

Die ungefähre Änderung des Funktionswertes beim Übergang

vom Punkt (2;-4;-1)

zum Punkt (2,25;-3,75;-0,75)

Beispielaufgaben Mehrdimensionale Analysis

Extremwerte unter Nebenbedingungen
Methode von Lagrange

Reichlich Übungsaufgaben
auf dem Blatt 10