

Vorlesung 17.6.2015

Wdh. Dosenproblem

Zielfkt : $f(r, h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h$ "oben offen"

Nebenbed : $g(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$ $V = 1 \text{ l}$
NB implizit

Lagrange Funktion : $L(r, h, \lambda) = \pi r^2 + 2\pi r h + \lambda \cdot (\pi r^2 h - 1000)$

Notwendige Bedingungen:

$$L_r(r, h, \lambda) = 2\pi r + 2\pi h + 2\pi r h \lambda = 0 \quad \text{I}$$

$$L_h(r, h, \lambda) = 2\pi r + \pi r^2 \cdot \lambda = 0 \quad \text{II}$$

$$L_\lambda(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - 1000 = 0 \quad \text{III}$$

$$\text{Aus II : } 2\pi r = -\lambda \pi r^2 \Leftrightarrow -\lambda = \frac{2\pi r}{\pi r^2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{r} *$$

$$\text{Aus I mit } * : 2\pi r + h \left(2\pi + 2\pi \cdot r \cdot \left(-\frac{2}{r}\right) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r + h(2\pi - 4\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r - 2\pi h = 0 \Leftrightarrow 2\pi r = 2\pi h$$

$$\Leftrightarrow r = h \quad **$$

$$** \text{ in III : } \pi r^2 \cdot r - 1000 = 0$$

$$\pi r^3 = 1000$$

$$r^3 = \frac{1000}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$$

$$\text{Also } r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 6,8281$$

Die Methode von Lagrange

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Zielfunktion mit n unabh. Variablen

$z_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ k Nebenbedingungen (selbst Fkt. mit n unabh. Variablen)
 $j = 1, \dots, k$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ k Lagrange-Multiplikatoren

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x)$$

$$L(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k}_{n+k \text{ Variablen}}) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_n)$$

Extremwertbestimmung:

Notwendige Bedingungen: $L_{x_i} = 0$ für $i = 1, \dots, n$

$L_{\lambda_j} = 0$ für $j = 1, \dots, k$

$n+k$ partielle Ableitungen 1. Ordnung

Lösen des nicht notw. linearen GS liefert die Kandidaten!

Nebenberrn: $L_{\lambda_j} = 0$: das sind die k Nebenbedingungen

Hinreichende Bedingung für die Existenz von Minima und Maxima bei Funktionen mit n unabh. Variablen und einer Nebenbedingung $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = 0$

Geg: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig und es ex. die partiellen $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ Ableitungen 1. + 2. Ordnung

Sei $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ und $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$
sei Kandidat

$$\text{Also } L_{x_1}(x^*) = L_{x_2}(x^*) = \dots = L_{x_n}(x^*) = 0$$

$$\text{Man bilde: } G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} & \overset{L_{\lambda x_1}}{g_{x_1}} \\ L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} & \overset{L_{\lambda x_2}}{g_{x_2}} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$
$$G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} & \dots & L_{x_1 x_n} & g_{x_1} \\ L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} & \dots & L_{x_2 x_n} & g_{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{x_n x_1} & L_{x_n x_2} & \dots & L_{x_n x_n} & g_{x_n} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & \dots & g_{x_n} & 0 \end{vmatrix}$$

Dann gilt: x^* lokales Maximum, falls

$$G_2 > 0, G_3 < 0, \dots \quad G_n \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

x^* lokales Minimum, falls

$$G_2 < 0, G_3 < 0, \dots, G_n < 0$$

Bp: $f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^3$

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

$$\text{NB: } g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$$

Das ist Blatt 10 A 16

Eingangsbeispiel:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z = 0$$

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$$

$$L_x(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \quad \text{I}$$

$$L_y(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \quad \text{II}$$

$$L_z(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2z \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{III}$$

$$L_{\lambda_1}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{IV}$$

$$L_{\lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z = 0 \quad \text{V}$$

$$\text{Ans I : } \lambda_2 = - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\lambda_1 x \right) \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \text{oder } \lambda_2 = 0$$

$$\text{Ans II : } \lambda_2 = - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\lambda_1 y \right) \quad (1) \quad (2)$$

$$(1) \text{ in V : } 2x + z = 0 \Rightarrow z = -2x \quad *$$

$$* \text{ in IV : } x^2 + x^2 + (-2x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{1}{6}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$\text{Kandidaten : } P_1 \left(+\sqrt{\frac{1}{6}}, +\sqrt{\frac{1}{6}}, -2\sqrt{\frac{1}{6}} \right)$$

$$= -\frac{1}{6}\sqrt{6}$$

$$\text{NR : } \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{6}$$

$$\text{bzw. } P_1 \left(\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6} \right)$$

$$P_2 \left(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6} \right)$$

$$\text{Ans (2) } (\lambda_2 = 0) : \text{Ans III : } 2\lambda_1 \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \text{oder } \lambda_1 = 0$$

$$(3)$$

$$(4)$$

$$\text{Ans (3) in V : } x = -y \quad ***$$

$$*** \text{ in IV : } x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{und } x_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{und damit: } y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Weitere Rand: } P_3 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0 \right)$$

$$P_4 \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0 \right)$$

$$(4): \lambda_1 = 0 \quad \text{in I und II eingesetzt: } x=y=0 \quad \text{mit IV: } z=0$$

↳ zu IV

Fall $\lambda_1 = 0$ tritt nicht ein

Man hat 4 Punkte (Kandidaten)

$$\left. \begin{aligned} f(P_1) &= \dots = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ f(P_2) &= \dots = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ f(P_3) &= \dots = 1 \\ f(P_4) &= \dots = 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{kleinster Abstand zur z-Achse} \\ \text{größter Abstand zur z-Achse} \end{array}$$

Interpretation des Lagrange-Multiplikator

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

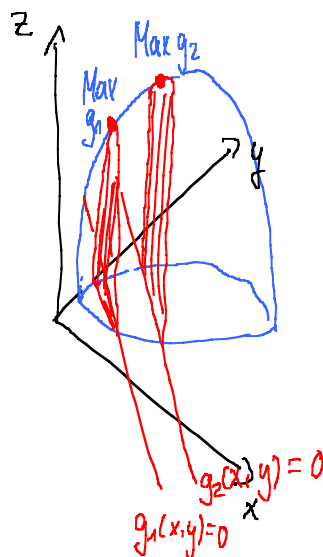
$$\frac{L(x, y, \lambda) - f(x, y)}{g(x, y)} = \lambda$$

Interpretation mit Hilfe der Differentialrechnung:

λ ist der Differentialquotient der Fkt. L "nach" der Fkt. g

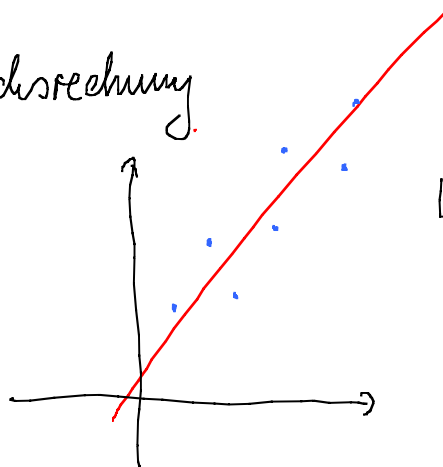
$$\lambda = \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial g}$$

(Infinitesimale Änderungsrate der Fkt. L bei Änderung der Fkt. g (Nebenbed.)) : marginale Änderungsrate
(Marginalanalyse)



λ gibt an, um wieviel sich das Maximum verschiebt

Montag: Ausgleichsrechnung



Lineares Zusammenh ng

Aufstellen der Geradengleichung