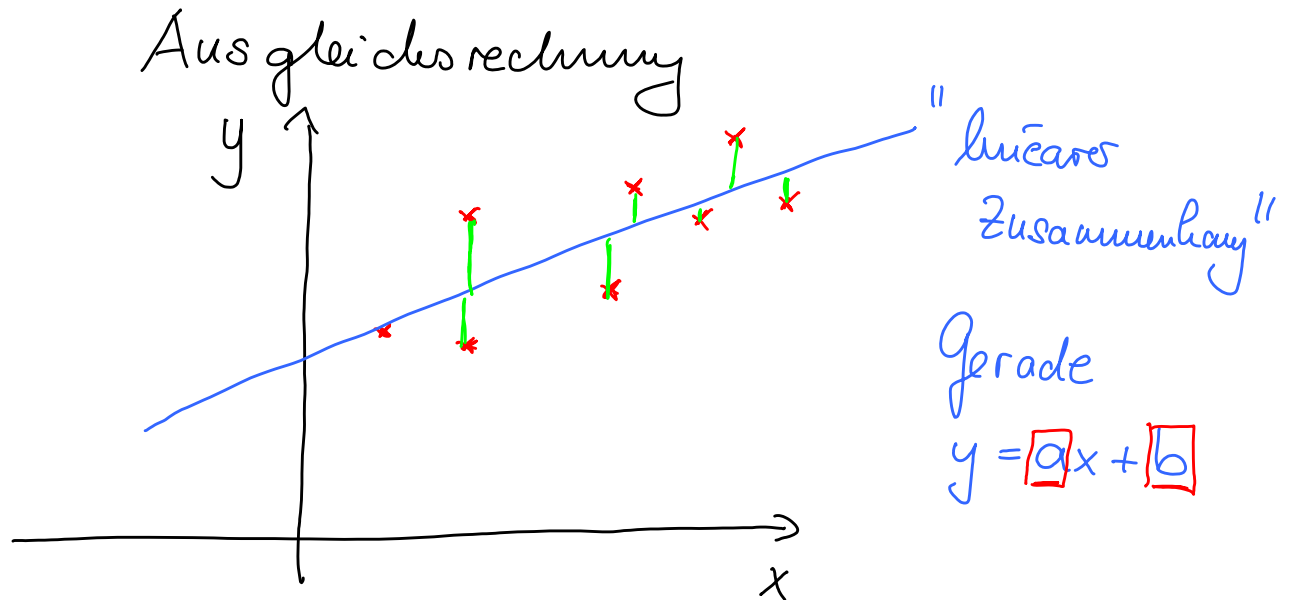


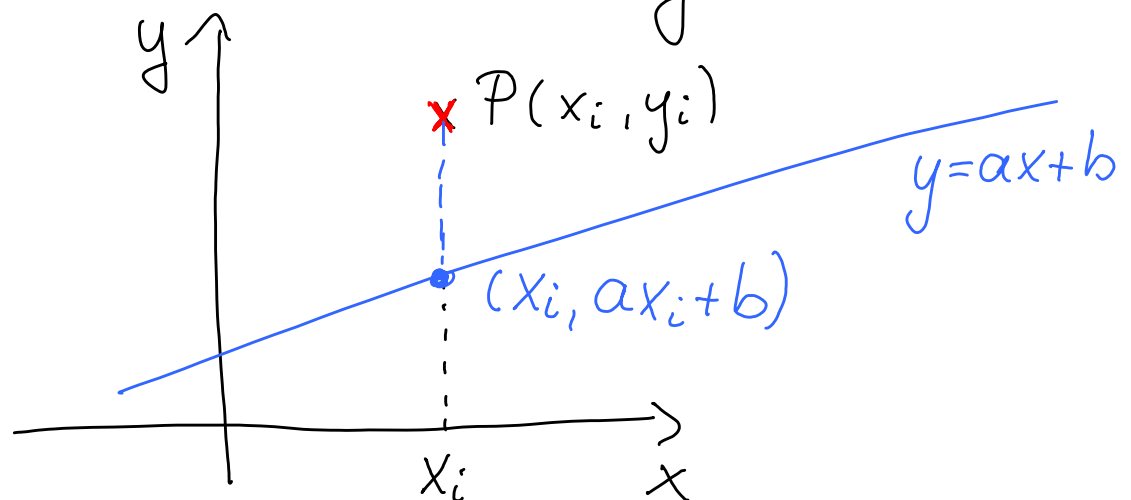
Vorlesung 22.6.15

Anwendung der mehrdimensionalen Analysis:



Lineare Anpassung

Methode der kleinsten Quadrate
nach C. F. Gauss



Abstand zw. Messpunkt und Geradenpunkt:

$$y_i - (ax_i + b)$$

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Summe der Abstandsquadrate ist eine Funktion Q mit den beiden Variablen a und b

Für $Q(a,b) = \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2(ax_i + b) \cdot y_i + (ax_i + b)^2$
 $- 2ax_i y_i - 2by_i$

Muss nun ein Minimum berechnet werden.

1) Notwendige Bedingungen

$$Q_a(a,b) = \sum_{i=1}^n -2x_i y_i + 2(ax_i + b) \cdot x_i$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n -x_i y_i + ax_i^2 + bx_i = 0 \quad (1)$$

$$Q_b(a,b) = \sum_{i=1}^n -2y_i + 2(ax_i + b)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n -y_i + ax_i + b = 0 \quad (2)$$

Aus (1): $-\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i) = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n ax_i^2 + bx_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \quad \textcircled{1}$$

Aus ②: $\sum_{i=1}^n -y_i + a x_i + b = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n a x_i + b$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n b$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + n b \quad \textcircled{*}$$

Setze: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

arithmetischen Mittelwerte der Meßwerte

Aus ②: $\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}_{\bar{y}} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n \cdot b}{n}$

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$\Rightarrow b = \bar{y} - a \bar{x} \quad **$$

** in $\textcircled{1}$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\bar{y} - a \bar{x}) \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\nearrow = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = n \cdot \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i = a \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x}$$

a, b sind die Parameter der Geraden

$$y = ax + b$$

Nachweis, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt

$$Q_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

$$Q_{bb} = 2 \sum_{i=1}^n 1 = 2n > 0$$

$$Q_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\begin{aligned} \Delta &= Q_{aa} \cdot Q_{bb} - Q_{ab}^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot 2n - \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\
&= 4 \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \\
&= 4 \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n n x_i^2 + n x_i^2 - \sum_{j=1}^n 2 x_i x_j \right) \right] \\
&= \dots = 4 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 \right] > 0
\end{aligned}$$

Also $\Delta > 0$

und $a_{aa} > 0$ (o.o.)

Damit liegt ein Minimum vor

Zusammenfassung

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

$\bar{x}, \bar{y}$ arithm.
Mittelwerte

$$b = \bar{y} - a \bar{x}$$

Bp:
gegeben

x_i	48	56	69	64	60	42	40	54	65	72	83	51
y_i	74	86	96	90	93	68	58	75	103	110	106	80

$$\bar{x} = \frac{704}{12} = 58,6\bar{6}$$

$$\bar{y} = \frac{1039}{12} = 86,58$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 63051$$

$$n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 60953,7$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 43076$$

$$n \cdot \bar{x}^2 = 41300,39$$

$$a = \frac{63051 - 60953,7}{43076 - 41300,39} = 1,181$$

$$b = 86,58 - 1,181 \cdot 58,66 = 17,298$$

$$y = 1,181 x + 17,298$$

Es gibt noch weitere Anpassungskurven

zu bestimmen

lineare Funktion : $y = ax + b$ a, b

quadratische Funktion : $y = ax^2 + bx + c$ a, b, c

$$\text{NB: } Q(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$$

Potenzfunktion : $y = ax^b$

$$\text{NB: } Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^b)^2$$

Exponentialfunktion : $y = ae^{bx}$

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ae^{bx_i})^2$$

Graphentheorie

Graph

