Klausur MA 1 – 15.3.2016

Aufgabe 1 a)

$$\sqrt{5-x} + 3 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-x} = x - 3 \qquad | \ (\ )^2$$

$$\Rightarrow 5 - x = (x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 5 - x = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 4$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4} \qquad | \ \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow x - \tfrac{5}{2} = \pm \tfrac{3}{2}$$

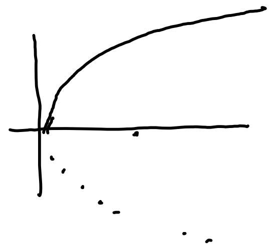
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \tfrac{8}{2} = 4}} \ \checkmark \qquad x_2 = \tfrac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Probe für x_1: $\sqrt{5-4} = 4 - 3$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$$

für x_2: $\sqrt{5-1} = 1 - 3$

$$\Leftrightarrow 2 = -2 \quad ↯$$



$$\underline{\underline{L = \{4\}}}$$

Häufige Fehler

$\sqrt{5-x} + 3 - x$ falsch quadriert

z.B. $\cancel{5 - x + 3^2 - x^2}$

↯ Summe oder Diff: Quadrieren mit Binomi

$$\Big(\underbrace{\sqrt{5-x}}_{a} + \underbrace{(3-x)}_{b}\Big)^2$$

$$= (5-x) + 2\sqrt{5-x}\,(3-x) + (3-x)^2$$

enthält $\sqrt{}$ weiter ⇒ Problem

$$\sqrt{5-x} + 3 - x$$

$$\cancel{= \sqrt{5} - \sqrt{x} + 3 - x}$$

Aufg 1 b)

$$(3 \cdot 7 + 81^{1285} - 27 \cdot 16) \bmod 8$$

$$= (21 + 1^{1285} - 3 \cdot 0) \bmod 8$$

$$= (5 + 1 - 0) \bmod 8$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

$$((21 \cdot 16)^{250} + 3 - 3 \cdot 15) \bmod 5$$

$$= ((1 \cdot 1)^{250} + 3 - 3 \cdot 0) \bmod 5$$

$$= (1 + 3 - 0) \bmod 5$$

$$= \underline{\underline{4}}$$

Häufige Fehler

$27 \cdot 16 = 432$ und dann mod 8

$\cancel{81^{1285} = 0}$ f

---

c) Binärstellen von 9^{500}

Binär = Basis 2

$$9^{500} = \left(2^{ld\, 9}\right)^{500}$$

$$= 2^{\underbrace{ld\, 9 \cdot 500}_{}} = 2^{1584.9}$$

aufgerundet sind dies die Vorkommastellen

$2^{()}$ und $ld()$ sind Umkehrfkt zueinander

$\Rightarrow x = 2^{ld(x)}$

$\Rightarrow$ 1585 Stellen

$$\boxed{ld(9) \cdot 500 = \frac{\ln(9)}{\ln(2)} \cdot 500}$$

$2^{ld(9^{500})}$

$2^{500 \cdot ld(9)}$

Aufgabe 2 a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+2n+2} + 4n - 5}{n+5} \right) \quad \Big| \text{ g.P.i.N.}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+2n+2} + \frac{4n}{n} - \frac{5}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} \right)$$

$$\boxed{\underset{\downarrow}{\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\sqrt{n^2 \ldots}} \atop 0 \cdot \infty}$$

Merke: $\frac{1}{n}$ vor der Wurzel ist $\frac{1}{n^2}$ unter der Wurzel

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \cancel{\frac{2n}{n^2}} + \cancel{\frac{2}{n^2}}} + 4 - \cancel{\frac{5}{n}}}{1 + \cancel{\frac{5}{n}}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{1} + 4}{1} = \underline{\underline{5}}$$

Häufige Fehler

- Wurzel falsch auflösen
- $\frac{1}{n}$ nicht unter Wurzel bringen
- L'Hospital anwenden: ist zwar denkbar, führt aber zu nix

$f(n) = \sqrt{n^2+2n+2} + 4n - 5$ (Zähler)

$$f'(n) = \frac{2n+2}{2\sqrt{n^2+2n+2}} + 4$$

Kettenregel!

wird nicht einfacher

$$\left((\sqrt{n})' = \frac{1}{2\sqrt{n}} \right)$$

Aufg. 2 b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right) \overset{\frac{0}{0}\text{-Sit.}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 0}{1}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{0+1}}\right)}{1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Aufg. 2c)

$$(\overline{A} \Rightarrow B) \wedge \overline{A} \iff (\overline{\overline{A}} \vee B) \wedge \overline{A} \quad | \text{ de Morgan}$$

$\overline{\overline{A}} = A$

$$\iff \underbrace{(A \wedge \overline{A})}_{0} \vee (B \wedge \overline{A})$$

$$\iff B \wedge \overline{A}$$

$$\iff \overline{\overline{B} \vee A}$$

$$\iff \overline{B \Rightarrow A}$$

alles gültige Lösungen

Aufg 3 a)

Taylor 6. Grades, $x_0 = 0$, $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

für $e^x = f(x)$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	e^x	1
1	$\vdots$	1
2		
3		$\vdots$
4		
5		
6		
7	e^x	1

$$T_6(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \ldots + \frac{1}{6!}x^6$$

$\boxed{x = \frac{1}{2} \text{ wählen!}}$

$$\sqrt{e} \approx T_6\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ldots = 1.6487196$$

mit TR ist $\sqrt{e} = 1.6487212\overline{71}$

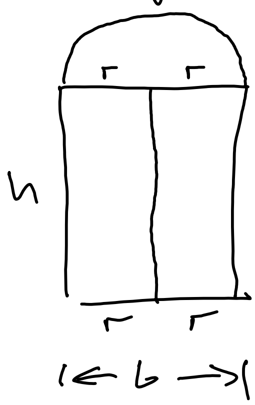
Restglied für $x_0 = 0$ und $x = \frac{1}{2}$

$$C = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f^{(7)}(x)| = 2 \quad \text{(war gegeben)}$$

$$\max |e^x|$$

$$R_6(x) = \frac{C}{7!} \left|0 - \tfrac{1}{2}\right|^7 = 0.0000031$$

Aufgabe 3b (Fenster)



$$(*) \quad \text{Umfang } U = \underbrace{2r}_{\text{unten}} + \underbrace{2h}_{l/r} + \underbrace{\frac{2\pi r}{2}}_{\text{Bogen}} = 20$$

$$(**) \quad \text{Fläche } A = 2r \cdot h + \frac{\pi r^2}{2}$$

(*) nach h auflösen

$$2h = 20 - 2r - \frac{\pi r}{1}$$

$$h = 10 - r - \frac{\pi r}{2}$$

in (**) einsetzen

$$A = 2r\left(10 - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= 20r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= 20r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

$$A'(r) = 20 - 4r - \pi r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{20}{\pi + 4} \approx 2.8$$

$$A''(r) = -4 - \pi < 0 .$$

Also ist $\underline{\underline{r = 2.8}}$ die Fläche A maximal

---

Aufgabe 4 a)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \\ 4x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -3 \\ -10 \\ x \\ 89 \end{pmatrix} = 4x - 24 - 100 + 4x^2 + 89 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 4x - 35 = 0 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - \frac{35}{4} = 0$$

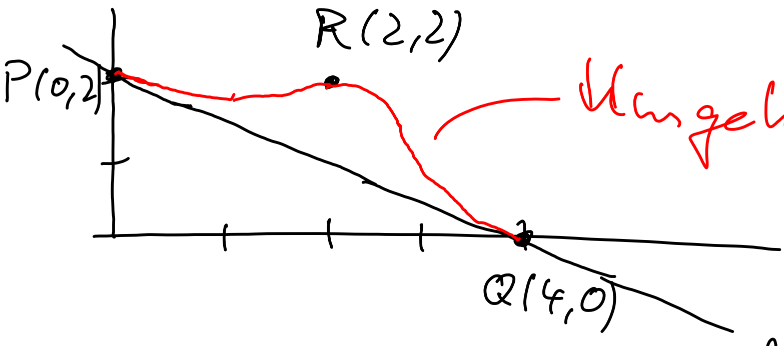
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{35}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{36}{4} = 9 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{2} = \pm 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = \frac{5}{2} \quad \vee \quad x_2 = -\frac{7}{2}}}$$

Aufgabe 4b



$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f(0) = 2 = e$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2} = d$$

$$f(2) = 2 = a\,16 + b\,8 + c \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 2$$
$$= 16a + 8b + 4c + 1 = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 16a + 8b + 4c = 1 \quad (1)$$

$$f(4) = 0 = 256a + 64b + 16c + \cancel{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 256a + 64b + 16c = 0 \quad (2)$$

$$f'(4) = -\frac{1}{2} = 256a + 48b + 8c \cancel{-\frac{1}{2}} = \cancel{-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad 256a + 48b + 8c = 0 \quad (3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 0 \\ 256 & 48 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid -16\,Z1 \\ \mid -16\,Z1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & -64 & -48 & -16 \\ 0 & -80 & -56 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid : (-16) \\ \mid : (-8) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & 2 \end{array}\right) \quad | - 2.5\, II$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$$

$$\Rightarrow 4b + 3 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{b = -\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow 16a + \cancel{8\left(-\frac{1}{2}\right)} + \cancel{4 \cdot 1} = 1$$

$$\Rightarrow 16a = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{16}}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 2}$$