

V 13.4.2016

Vdh. Boxplot
Wahrscheinlichkeiten 3 Axiome

$$1) 0 \leq p \leq 1$$

$$2) P(\Omega) = 1$$

$$3) P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \\ (\text{Summenregel}), \text{ wenn } \underline{A_1 \cap A_2 = \{\}} \underline{\quad}$$

Kombinatorik

QQ2-Projekt "Kombinatorik-Trainer"

www.gm.fh-koeln.de/kombinatorik

Lösungseingabe $6^3 = 6^3 = 216$

$$\binom{4}{2} = (4 \text{ über } 2) = 6$$

Laplacesche Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle Fälle}}$$

Gilt aber nur, wenn alle betrachteten Fälle gleichwahrscheinlich

Bsp: Würfel, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind gleichwahrsch

$A = \text{"Augenzahl} \geq 5"$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Summenregel

Produktregel: Problem $X \hat{=}$ Teilschritt X_1 , Teilschritt X_2

$$\begin{array}{ccccc} \#X & & \#X_1 & \cdot & \#X_2 \\ 9 & = & 3 & & 3 \end{array}$$

Kombinatorik = "Kunst des Zählens"

Wdh 1. Sem. • Fakultät $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1$

$$0! = 1$$

• Binomialkoeffizient
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

für $k \neq 0$

Variation: Auswahl von k Elementen aus n -elem.

Menge, geordnet, Reihenfolge wichtig, Liste

$$(1, 5, 3) \neq (1, 3, 5)$$

Bsp. Autorennen

Kombination: Auswahl von k -Elementen aus n -elem.

Menge, ungeordnet, Reihenfolge unwichtig, Set = Menge

k -elementige Teilmenge

$$\{1, 2, 5\} = \{5, 1, 2\}$$

Bsp. Lotto

Permutation: Variation mit $k = n$

Bsp. Skatspiel

Stichproben

Wir ziehen k Elemente aus n -elementiger Menge und wollen die Anzahl der Möglichkeiten wissen

	geordnet (Variation)	ungeordnet (Kombination)
Ziehen mit Zurücklegen <u>[ZmZ]</u>	Würfeln n^k ①	geheime Wahlausgang BBCCFCA BBBB ④ $\binom{n+k-1}{n-1}$
Ziehen ohne Zurücklegen <u>[ZoZ]</u>	Autorennen Rangfolgen ② $\frac{n!}{(n-k)!}$	Lotto ③ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- ① Variation, ZmZ: zerlege in k Teilschritte, jeder hat n Möglichkeiten

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \cdot \text{mal}} = n^k$$

(Produktregel)

- ② Variation, ZoZ: zerlege in k Teilschritte

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Terme}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- ③ Kombination, ZoZ

- Variation $(1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1)$ bei k Elementen: $k!$ Fälle

- bei Kombination sind alle diese Fälle nur noch 1 Fall $\{1,2,3\}$

$\Rightarrow$ Fall ② mit $k!$ dividieren, um Mehrfachzählungen herauszunehmen

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$$

④

④

geheimer Wahl ausgang

Bsp: 3 Kand. A, B, C, 10 Wähler

Rohergebnis BBAAACACABC

Sortieren

$\overbrace{A A A A}^{1 \ 2 \ 3 \ 4} \underbrace{B B B}_{5 \ 6 \ 7 \ 8} \underbrace{C C C}_{9 \ 10 \ 11 \ 12}$

Positionsmenge $\rightarrow$ $\underbrace{A A A A}_{1 \ 2 \ 3 \ 4} \underbrace{B B B}_{5 \ 6 \ 7 \ 8} \underbrace{C C C}_{9 \ 10 \ 11 \ 12}$

Trennblatt A/B $\rightarrow$ Trennblatt B/C $\rightarrow$ $k+n-1$ Blätter $n-1$ Trennblätter

Wahl ausgang eindeutig festgelegt, wenn Position der Trennblätter

Ziehen aus der Positionsmenge $\{1, \dots, 12\}$, $20Z$,

Kombination $\rightarrow \binom{n+k-1}{n-1}$ Möglichkeiten

$$= \binom{n+k-1}{k}$$

Systematik Kombinatorik

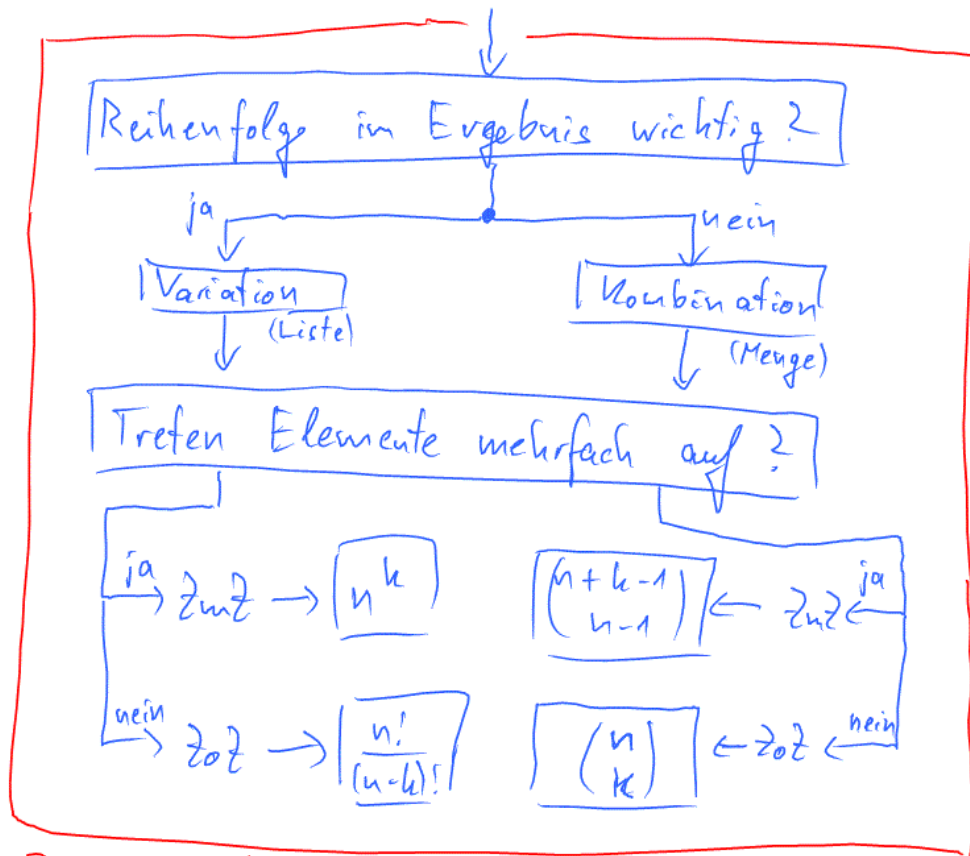
Problem in Teilschritte zerlegbar?

ja nein

Teilschritte getrennt,
Produktregel

Gesamtproblem
lösen





Box für etwaige Teilschritte durchlaufen

Beispiel : In einer Urne sind 10 weiße und 20 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrsch. bei ZöZ 3 weiße und 1 schwarze Kugel zu ziehen?

Vorbemerkung

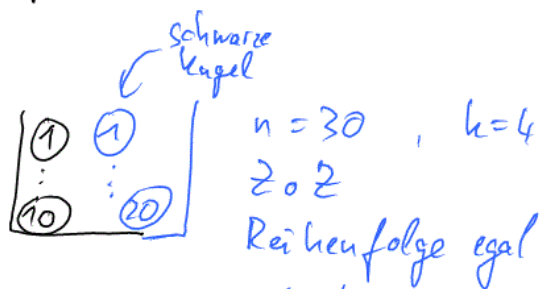
Gedanken experiment Urne. Objekte in Urne müssen unterscheidbar sein.

20 schwarze Kugeln $\rightarrow$ durchnummerieren

Bsp: 99 schwarze Kugeln, 1 weiße

$$P(S) = \frac{99}{100}$$

Lösung: alle Fälle



$$\Rightarrow \binom{30}{4} \text{ Möglichkeiten}$$

günstigen Fälle für 3x weiß, 1x schwarz



1. Schritt 2. Schritt
 3x ~~20~~ 1x ~~20~~

$$n=10, k=3 \quad n=20, k=1$$

$$\frac{10!}{3! \cdot 7!} = \binom{10}{3} \cdot \binom{20}{1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 20 = 120 \cdot 20$$

$$P(3 \text{ weiß}, 1 \text{ schwarz}) = \frac{\text{günstige}}{\text{alle}} = \frac{120 \cdot 20}{\binom{30}{4}} = 8.757\%$$

