$\boxed{\text{V MA2 - 25.4.2016}}$

Zufallsvariablen rekapituliert

Kombinatorik: P für jedes Ereignis neu rechnen (z.B. 6 Richtige, 5 Richtige, 4 ... ... im Lotto)

→ mühsam

Zufallsvariablen: über viele Ereignisse gemeinsam nachdenken, die sich nur durch Zahlenwert unterscheiden $(\underbrace{6, 5, 4, ...}_{x_m =})$

→ einfacher zu rechnen

→ geht auch unendlich viele x_m (z.B. $x_m \in \mathbb{Z}$ oder $x_m \in \mathbb{R}$)

Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$

diskret ↙ ↘ stetig

diskret (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$)	stetig $x_m \in \mathbb{R}$
$w_m = P(X = x_m)$ $= P(x_m \leq X < x_{m+1})$	$w(t)\Delta t =$ $P(t - \Delta t \leq X \leq t)$
$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w_m = 1$	$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_t w(t)\Delta t$ (*) $= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\,dt = 1$

diskret	stetig
Verteilungsfunktion	
$F(x_m) = P(X \leq x_m) = \sum_{m'=-\infty}^{m} w_{m'}$	$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} w(t')\,dt'$
Erwartungswert	
$E(X) = \sum_m x_m w_m$ (jeden Wert x_m von X mit seiner Wahrsch w_m wichten	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, w(t)\,dt$ (Integral als Grenzwert $\delta t \to 0$ der Summe, analog zu (*)

$E(X)$ ist <u>bloße Zahl</u> μ

<u>Bsp</u>: Trifft $x_m = 10$ mit Wahrsch. $P(X=10) = 5\%$
und $x_m = 0$ " " $P(X=0) = 95\%$

$$E(X) = 0 \cdot 95\% + 10 \cdot 5\% = \underline{\underline{0.5}}$$

<u>Beachte</u>: Auch wenn alle $x_m \in \mathbb{Z}$, so ist $E(X)$ i.d.R. $\notin \mathbb{Z}$

Folgender Satz gilt gleichermaßen für diskret u. stetig

<u>Satz 10-7 Linearität</u>

X, Y Zuf. var., $a, b \in \mathbb{R}$ Wahrsch $w_m^{(X)}$, $w_n^{(Y)}$

1) $E(aX + b) = a\,E(X) + b$

2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Beweis für X, Y diskret:

1) $E(aX+b) = \sum_m (a x_m + b)\, w_m^{(X)}$

$= a \underbrace{\sum_m x_m w_m^{(X)}}_{E(X)} + b \underbrace{\sum_m w_m^{(X)}}_{1}$

$= a\, E(X) + b$

2) $E(X+Y) = \sum_m \sum_n (x_m + y_n)\, w_m^{(X)} w_n^{(Y)}$

$= \underbrace{\left(\sum_m x_m w_m^{(X)}\right)}_{E(X)} \cdot \underbrace{\left(\sum_n w_n^{(Y)}\right)}_{1} + \underbrace{\left(\sum_m w_m^{(X)}\right)}_{1} \cdot \underbrace{\left(\sum_n y_n w_n^{(Y)}\right)}_{E(Y)}$

$= E(X) + E(Y)$

Varianz und Standardabweichung

Def: Hat X den Erwartungswert $\mu = E(X)$, so ist die Varianz v. X

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$$

diskret	stetig
$\mathrm{Var}(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x_m - \mu)^2 w_m$	$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 w(t)\,dt$

Varianz: wie sehr streuen die X-Werte um μ?

Gar nicht $\Rightarrow \mathrm{Var}(X)$ 0

wenig $\Rightarrow \mathrm{Var}(X)$ klein

viel $\Rightarrow$ " groß

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Ü2 X = Gewinn − Einsatz

d	x_m	Ereignisse	w_m
5	28 €	(1,6), (6,1)	$\frac{2}{36}$
4	8 €	(1,5) (5,1) (2,6)(6,2)	$\frac{4}{36}$
≤ 4	−2 €	der Rest	$\frac{30}{36}$

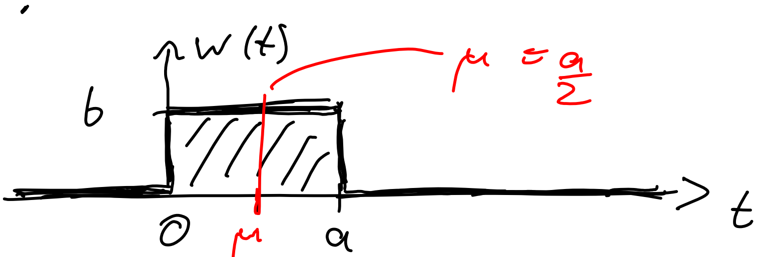
$$E(X) = 28 \cdot \frac{2}{36} + 8 \cdot \frac{4}{36} - 2 \cdot \frac{30}{36} = \dots = \frac{7}{9} > 0$$

$\Rightarrow$ also <u>spielen</u>

<u>Bsp zu Varianz / stetige Zuf. var</u>

Sei X in $[0, a]$, $a > 0$ gleichverteilt stetige Zufallsvariable.
Welchen Erwartungswert, welche Varianz hat X?

<u>Lsg</u>



$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\,dt = \int_0^a w(t)\,dt = \int_0^a b\,dt = a \cdot b = 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{a} \qquad \Rightarrow w(t) = \begin{cases} 1/a & \text{f. } t \in [0,a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \int_0^a t\,w(t)\,dt = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^a = \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{2} - 0\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{a}{2}}}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)\; w(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{a} \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a}\; \frac{1}{3}\left(t - \frac{a}{2}\right)^3 \Bigg|_0^a = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{a^2}{3\cdot 4} = \underline{\underline{\frac{a^2}{12}}}$$