

V MA2 - 18.5.2016

Freier Fall: Beschleunigung $a = -g$
 = Änderung der Geschwindigkeit $a(t) = v'(t)$

Geschwindigkeit = Änderung des Ortes $s(t)$: $v(t) = s'(t)$

$$\Rightarrow a(t) = s''(t) = -g$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{gilt immer}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{freier Fall}}$

DGL $\boxed{s''(t) = -g}$

Nomenklatur $\ddot{s}(t) = -g$ ist äquivalente Schreibweise

Übung Typisieren

- linear / nicht linear
- Ordnung
- explizit / implizit
- homogen / inhomogen
- konst. Koeffizienten oder nicht

(a) $y'(x) = -2x$	1. Ordnung, explizit, linear, inhomogen (2x)
(b) $x + y y' = 0$	1. Ordnung, implizit, nicht-linear, - (inhomogen)
(c) $\ddot{s}(t) = -g$	2. Ordnung, explizit, linear, inhomogen
(d) $y'' + y = 0$	2. Ordnung, explizit, " , homogen
(e) $2y'' - 4y' + 20y = \cos(\omega x)$	2. Ordnung, explizit, " , inhomogen
$y'' = \frac{\cos(\omega x) + 4y - 20y}{2}$	(a), (c), (d), (e) sind alles linear

DGLs mit konstanten Koeffizienten

Lösen einfacher DGLs

Nur eine Ableitung

$$s''(t) = -g$$

dann Lösung durch Integration

$$\int s''(t) dt = \int (-g) dt$$

$$\Leftrightarrow s'(t) = -gt + C_1 \quad (1)$$

Nochmal Integrieren

$$\int s'(t) dt = \int (-gt + C_1) dt$$

Anfangsbedingung

$$s'(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (2)$$

$$s(0) = 1m$$

mit Anfangsbed. (1)

$$0 = s'(0) = -g \cdot 0 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$1m = s(0) \stackrel{(2)}{=} 0 + 0 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 1m$$

$$\Rightarrow \text{spezielle Lösung } \underline{s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 1}$$

Beispiel radioaktiver Zerfall $\boxed{\dot{x}(t) = -0.05x(t)}$ (*)

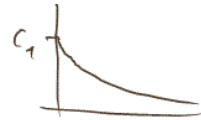
$$\text{Ansatz } x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\text{Einsetzen in (*)} \quad \lambda e^{\lambda t} = -0.05 e^{\lambda t} \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -0.05$$

$\Rightarrow x(t) = e^{-0.05t}$ ist spezielle Lösung der DGL

Allg. Lsg: $c_1 e^{-0.05t}$



$$\begin{array}{l} \text{Übung } 1) \quad \ddot{x}(t) + 4x(t) = 0 \\ \quad \quad 2) \quad \ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 404x(t) = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Lösen DGLs} \\ \text{mit Ansatz} \\ x(t) = e^{\lambda t} \end{array}$$

Lösungen 1) Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda \cdot \lambda e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen 1) $\lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0$ $\quad | : e^{\lambda t}$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -4$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\begin{array}{l} (\text{Probe } (-2i)^2 \\ = 4i^2 = -4) \end{array}$$

Zwei Lösungen $x_1(t) = e^{2it}$, $x_2(t) = e^{-2it}$

$$x_{1,2}(t) = \cos(2t) \pm i \sin(2t)$$

Allg. Lsg: $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$

oder $a \cos(2t) + b \sin(2t)$

$$\begin{array}{l} 2) \text{ Lsg: } \\ x_1(t) = e^{-2t} e^{+20i t} \\ x_2(t) = e^{-2t} e^{-20i t} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}} \right\} \lambda_{1,2} = -2 \pm 20i$$