

Vorlesung Mathematik 2

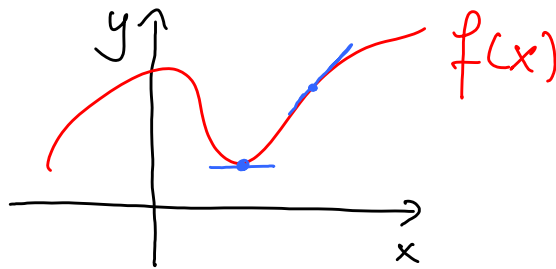
23.5.2016

Die nächsten 4 Montage :

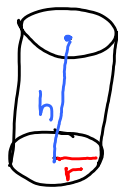
Beginn Vorlesung 10.50 Uhr

Mehrdimensionale Analysis

bisher : Funktionen mit einer unabh.
Variablen



im WS



$$V_{\text{Zyl}} : \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V(\underline{r}, \underline{h}) = \pi \cdot \underline{r}^2 \cdot \underline{h}$$

$$O(\underline{r}, \underline{h}) = 2\pi \cdot \underline{r} \cdot \underline{h} + 2\pi \cdot \underline{r}^2$$

in der Schule : Wurf

$$\begin{aligned} W(\underline{\alpha}, \underline{v_0}) &= \frac{2 \cdot \underline{v_0}^2 \cdot \sin \underline{\alpha} \cdot \cos \underline{\alpha}}{g} \\ &= \underline{v_0}^2 \cdot \sin(2\underline{\alpha}) \end{aligned}$$

Def: Fkt. mit n Variablen

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

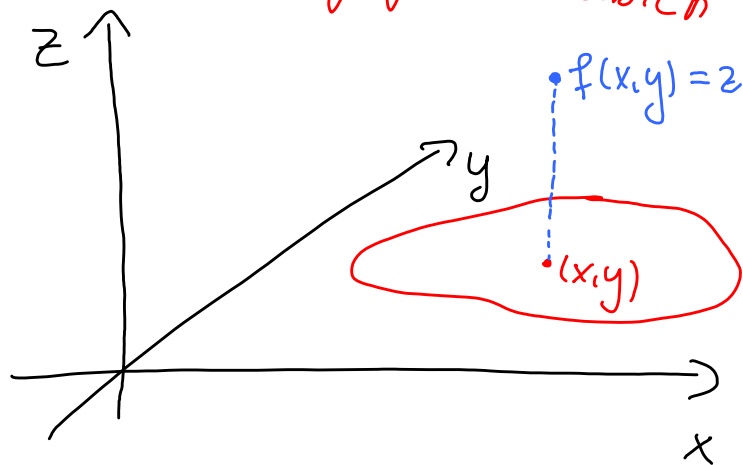
$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad n\text{-Tupel}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

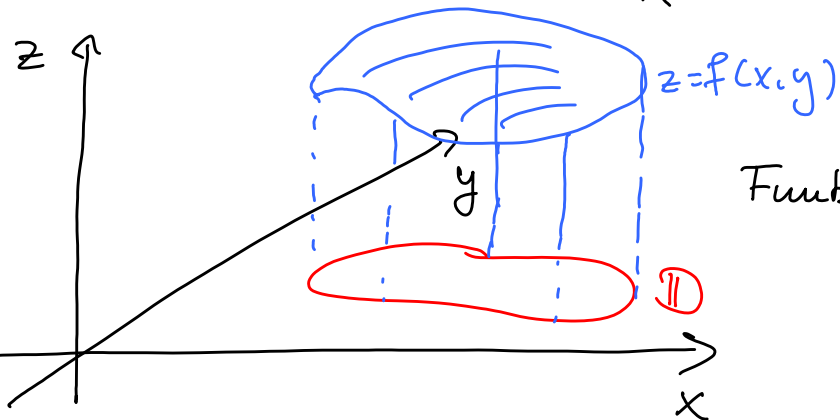
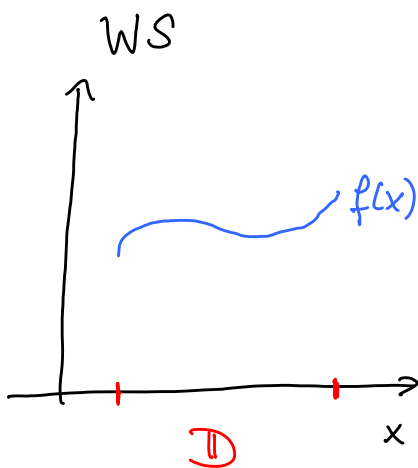
Spezialfall: $n=2$

$$\begin{array}{c} z = f(x, y) \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{abhängige} \quad \text{unabhängige Variablen} \\ \text{Variable} \end{array}$$

$n=2$



3-D -
Darstellung



Funktionsgebilde

Bp: Ebene im Raum

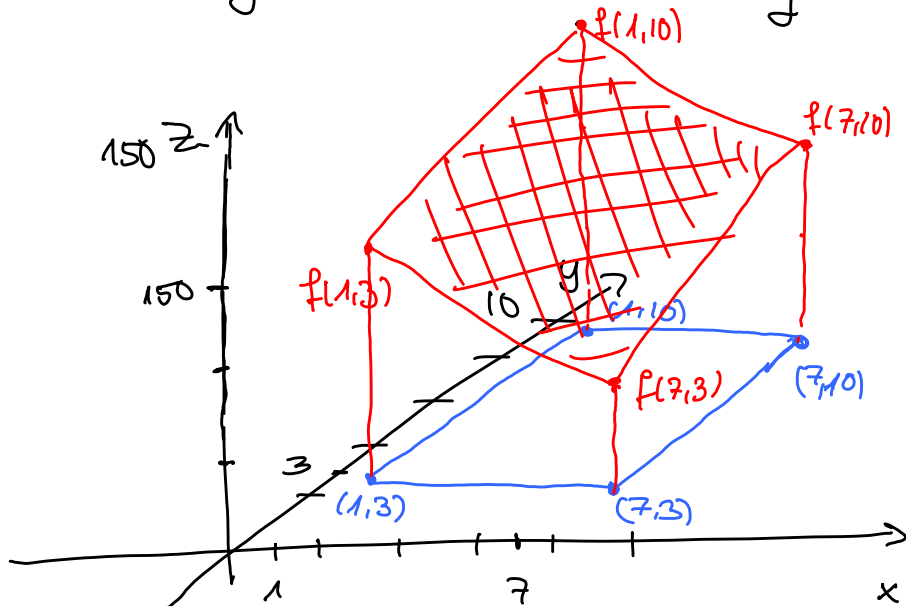
$$z = f(x, y) = ax + by + d \quad \text{explizit}$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{implizit}$$

$$f(x,y) = 110 - 10x + 5y$$

$$1 \leq x \leq 7$$

$$3 \leq y \leq 10$$



Berechnung der
"Ecken"

$$f(1,3) = 115$$

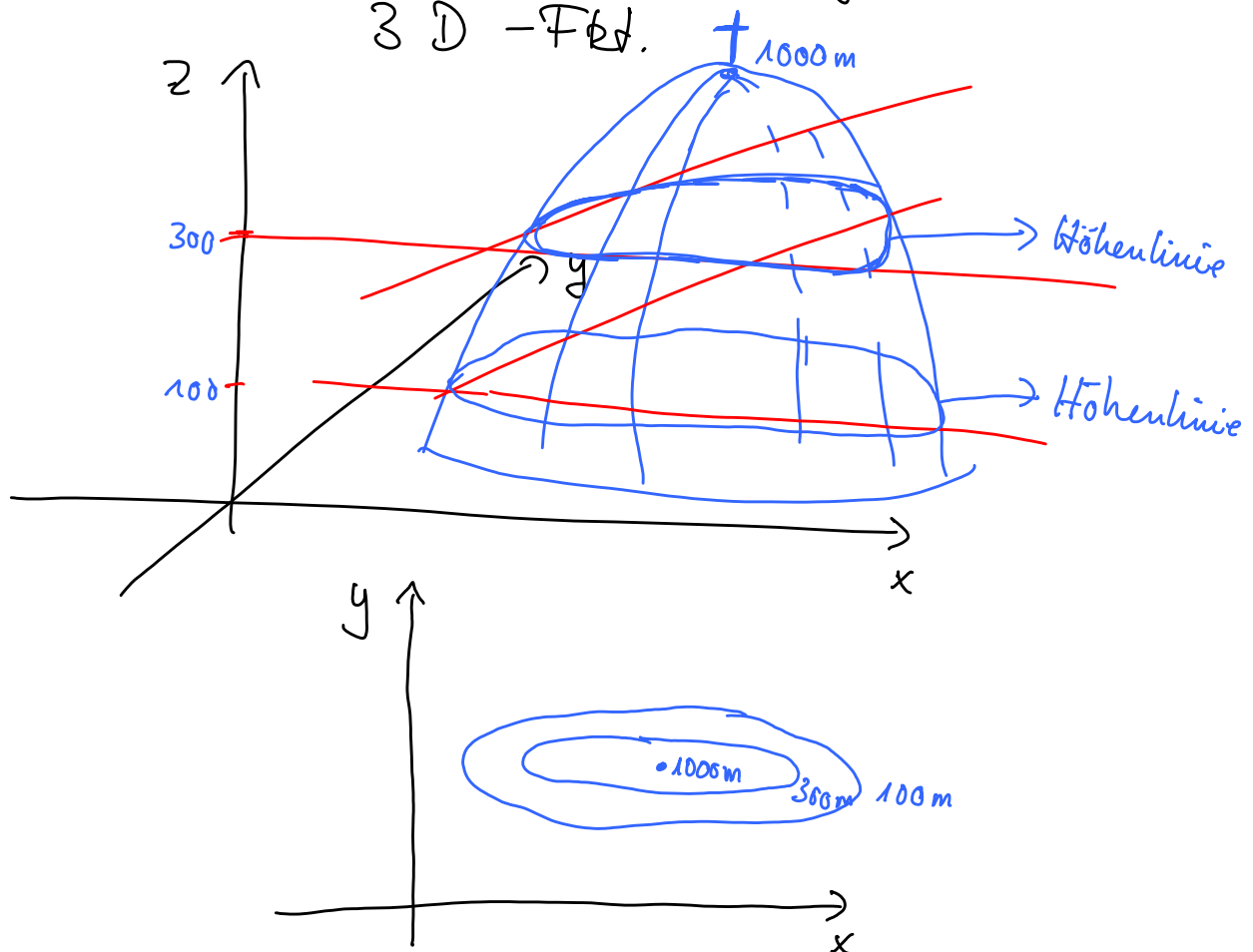
$$f(7,3) = 55$$

$$f(7,10) = 90$$

$$f(1,10) = 150$$

Hilfsmittel zur Veranschaulichung von

3 D - Fkt.



1. Überblick: Höhenlinien

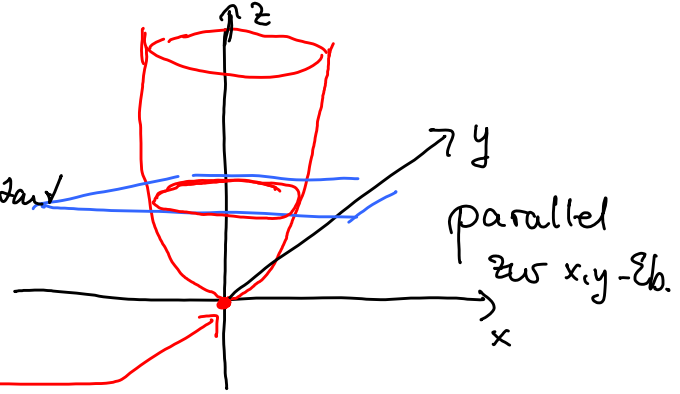
Betrachte die Funktion für einen konstanten z -Wert

$$z = c \quad c \text{ konstant}$$

Bp: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2 = z_0$ z_0 ist konstant

Wähle $z_0 = 0, 1, 2, 3, 4$



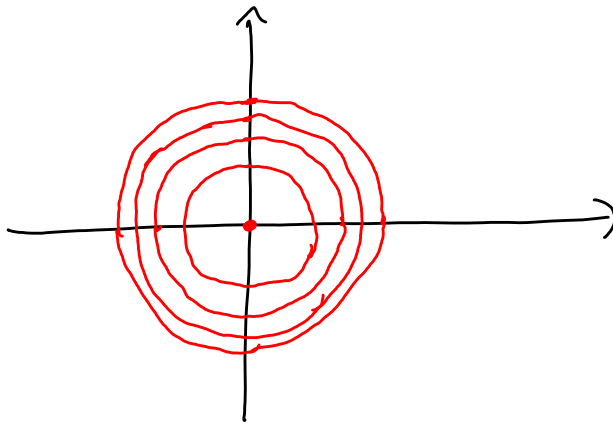
$z_0 = 0 : x^2 + y^2 = 0$

$z_0 = 1 : x^2 + y^2 = 1$ Kreis um 0 mit $r=1$

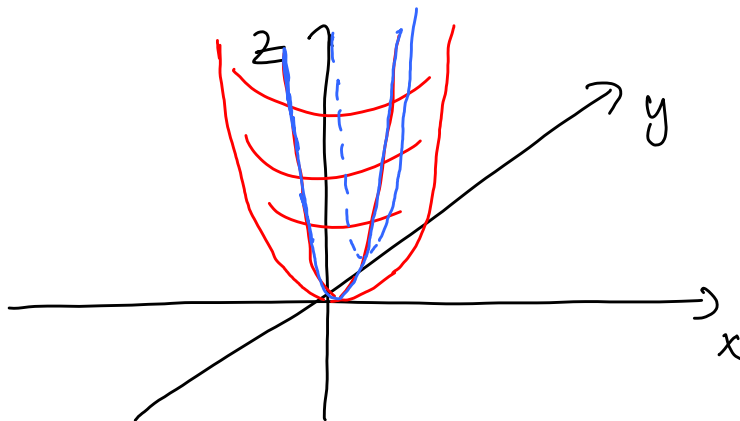
$z_0 = 2 : x^2 + y^2 = 2$ Kreis um 0 mit $r=\sqrt{2}$

$z_0 = 3 : x^2 + y^2 = 3$ [Erinnerung: Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$]

$z_0 = 4 : x^2 + y^2 = 4$ Kreis um 0 mit $r=\sqrt{4}=2$



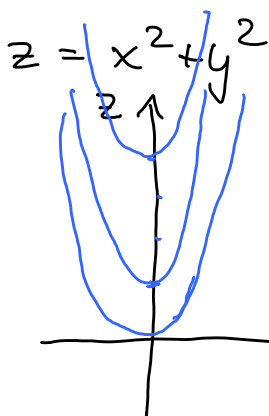
Höhenliniendiagramm
des Rotationsparaboloids
sind Kreise



Schnitte parallel
zur $y-z$ Ebene:
 x konstant

Schnitte parallel
zur $x-z$ Ebene
 y konstant

1) $x_0 = 0, 1, 2$

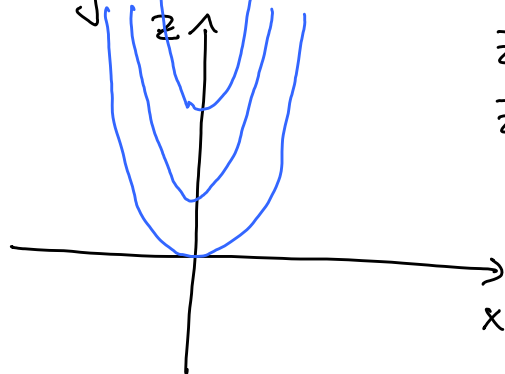


$x_0 = 0 : z = y^2$

$x_0 = 1 : z = y^2 + 1$

$x_0 = 2 : z = y^2 + 4$

2) $y_0 = 0, 1, 2$



$z = x^2$ $y_0 = 0$

$z = x^2 + 1$ $y_0 = 1$

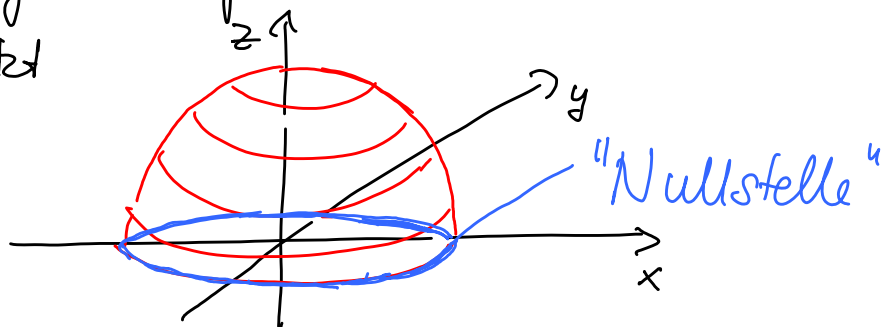
$z = x^2 + 4$ $y_0 = 2$

Funktionseigenschaften

Bp: 3 D-Fkt

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$f(x, y) = 0$



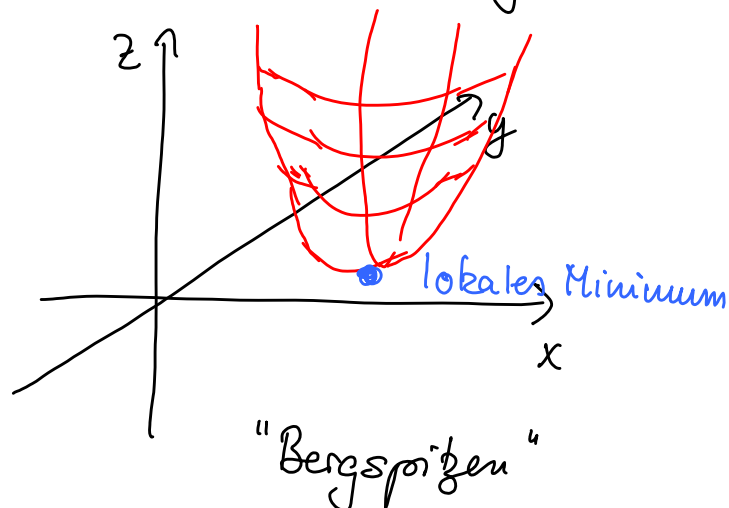
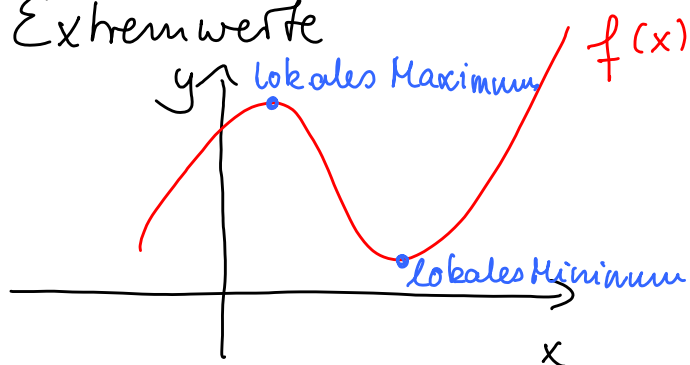
$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$

Quadr.

$\Rightarrow 1 - x^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 = x^2 + y^2$

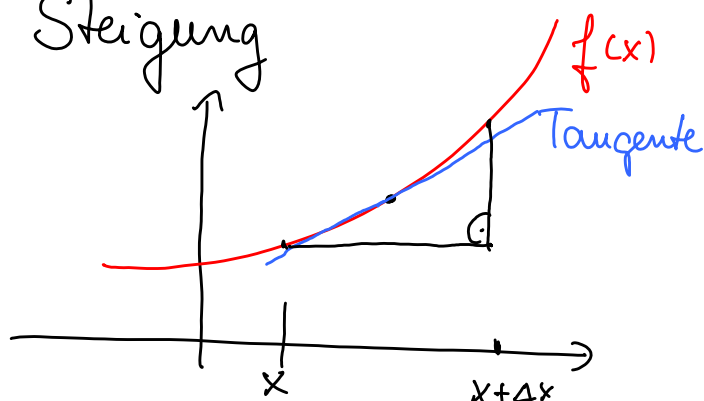
Extremwerte



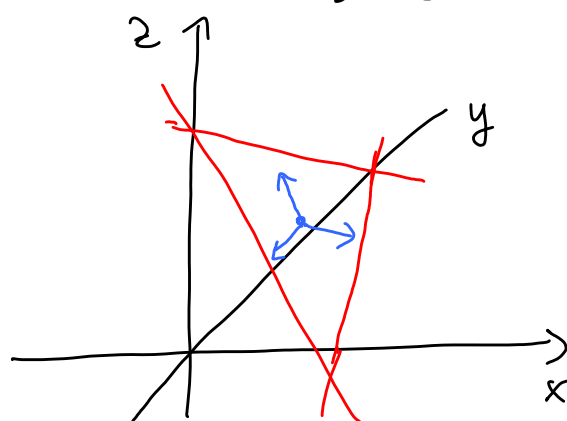
"Bergspitzen"

"Talsenken"

Steigung



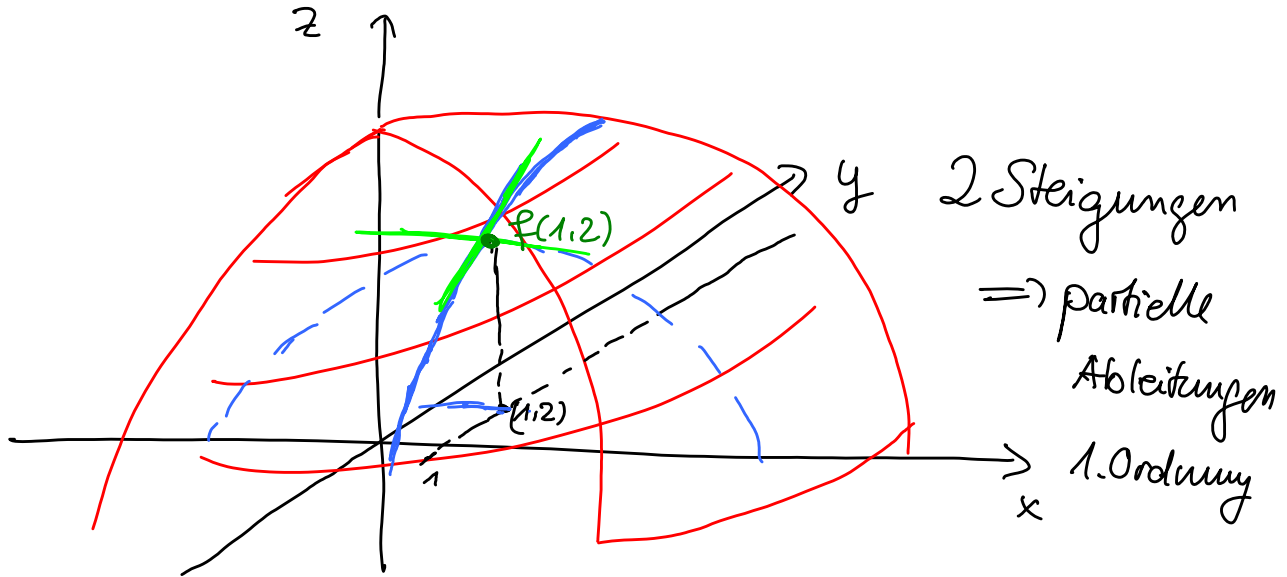
$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$



Steigung ist von einer

Richtung abhängig!

Steigung von 3D-Funktionen



$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Bp: $z = f(x,y) = e^{x \cdot y}$

$$f_x(x,y) = y \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f_y(x,y) = x \cdot e^{x \cdot y}$$